Devoir libre de mathématiques

proposé par Vincent Rossetto

Ce devoir de mathématiques est libre. Cela signifie que vous êtes libre de le faire ou pas, en entier ou en partie, seul ou à plusieurs. Il ne comptera pas dans la note finale. Toute copie rendue sera corrigée, il n'y a pas de date limite. Vous pouvez mettre les copies dans mon casier. Le degré de difficulté des questions est indiqué par le nombre d'étoiles

- ⋆ facile, nécessite d'avoir compris le cours ;
- ⋆⋆ assez facile, demande une bonne connaissance du cours ;
- ⋆⋆⋆ moins facile, demande la maîtrise du cours.

1 Calcul de déterminants

1. ⋆ Calculer

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & -1 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 8 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 & 0 \\ f & d & 0 & c & 0 \\ z & y & x & j & k \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & q & 0 & r & t \end{vmatrix}$$

2. ⋆ Calculer

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 & 1^3 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 3^0 & 3^1 & 3^2 & 3^3 \\ 4^0 & 4^1 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix}$$

3. ⋆⋆ Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -x \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

   Indication : développer selon une ligne ou une colonne bien choisie (de nombreux choix sont possibles).

4. ⋆⋆
   Calculer le déterminant d'une matrice carrée antisymétrique d'ordre impair.

5. ⋆⋆⋆
   Une matrice de permutation est une matrice telle que sur chacune de ses ligne et chacune de ses colonnes, il n'y a que des zéros et un seul 1, Montrer que le déterminant d'une matrice de permutation est égal à 1 ou à -1.

2 Sous-espaces vectoriels de matrices

2.1 Les matrices de Bombelli $\star$

On considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme

$$Z_{x,y} = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

avec $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que ces matrices forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux qu'on appellera $\mathcal{C}$.

Calculer le produit de deux éléments de $\mathcal{C}$ et montrer qu'il appartient à $\mathcal{C}$. On définit maintenant l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & z & \longmapsto & \begin{bmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{bmatrix} \end{array}$$

Montrer que $\rho(zz') = \rho(z)\rho(z')$. On a ainsi une analogie avec le produit des nombres complexes. Calculer le déterminant de $\rho(z)$. ($\star\star$) En déduire quelles sont les matrices de $\mathcal{C}$ qui sont inversibles et donner leur inverse.

2.2 Les matrices d'Hamilton

2.2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{H}$ $\star$

On considère maintenant le sous–espace vectoriel $\mathcal{H}$ des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ Z = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

c'est–à–dire $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(\{I, X, Y, Z\})$. Calculer la table de multiplication suivante en conclure que le produit de deux éléments de $\mathcal{H}$ est un élément de $\mathcal{H}$.

	I	X	Y	Z
I				
X				
Y				
Z				

Calculer le déterminant de la matrice $xX + yY + zZ + tI$ où $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. À quelle condition ce déterminant s'annule-t-il ?

2.2.2 Analogie avec les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $\star\star$

On définit l'application linéaire ρ suivante

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & (\underbrace{x,\, y,\, z}_{\vec{u} \in \mathbb{R}^3};\, t) & \longmapsto & tI + xX + yY + zZ. \end{array}$$

Si $\vec{u}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) on note $\rho(x, y, z ; t)$ sous la forme $\rho(\vec{u} ; t)$. Montrer que pour $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$$\rho(\vec{u} ; 0)\rho(\vec{v} ; 0) = \rho(\vec{u} \wedge \vec{v} ; -\vec{u} \cdot \vec{v})$$

En déduire que

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \ \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

3 Déterminant de taille n $\star\star$

On pose

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

D_n a n lignes et n colonnes. Trouver une équation reliant D_n, D_{n-1} et D_{n-2}. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ D_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

4 Matrice nilpotente, unipotente

Une matrice nilpotente est une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe un entier p vérifiant $A^p = 0$. Une matrice unipotente est une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe un entier p vérifiant $A^p = I$.

4.1 Exemples $\star$

1. Montrer que la matrice

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & 0 \\ -9 & -7 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   est nilpotente, en calculant N^4. On appelle ordre d'une matrice nilpotente A le plus petit entier p tel que $A^p = 0$. On a alors $A^{p-1} \neq 0$. Quel est l'ordre de N ? Calculer $\det N$.

2. Montrer que la matrice

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & 0 \\ -9 & -7 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est unipotente en calculant U^4. On appelle ordre d'une matrice unipotente A le plus petit entier p tel que $A^p = I$. On a alors $A^k \neq I$ si $1 \leqslant k \leqslant n$. Quel est l'ordre de U ? Calculer $\text{dét}\, U$.

4.2 Un résultat sur les matrices nilpotentes ⋆⋆

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'ordre p. Que vaut le déterminant de N ? Montrer que le produit de deux matrices nilpotentes qui commutent est nilpotent. Montrer que la matrice $I - N$ est inversible et que son inverse est

$$I + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}.$$

4.3 Les matrices unipotentes ⋆⋆

Soit U une matrice unipotente d'ordre p de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quelles sont les valeurs possibles de $\text{dét}\, U$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$? Montrer que U est inversible et calculer son inverse. Montrer que le produit de deux matrices unipotentes qui commutent est unipotent.

On pose
$$S = I + U + U^2 + \cdots + U^{p-1}.$$

Montrer que $US = S$. En calculant de deux façons différentes la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} U^k S$ montrer que $S^2 = pS$.

4.4 Ordre d'une matrice nilpotente ⋆⋆⋆

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle par extension $\ker A$ et $\operatorname{Im} A$ le noyau et l'image de l'application linéaire $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de matrice A. Montrer que pour une matrice nilpotente N d'ordre p on a

$$\{(0,\, 0,\, \ldots,\, 0)\} = \ker N^0 \subsetneq \ker N \subsetneq \ker N^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker N^{p-1} \subsetneq \ker N^p = \mathbb{R}^n.$$

Indication : montrer d'abord que si $k \in \mathbb{N}$, $\ker N^k \subset \ker N^{k+1}$. Utiliser ensuite un vecteur $x \in \mathbb{R}^n \setminus \ker N^{p-1}$. En déduire grâce à la dimension que

$$\boxed{p \leqslant n}.$$