Devoir de mathématiques

posé par Vincent Rossetto

Notes de cours autorisées, calculatrice interdite

1 Étude des transvections

Dans cet exercice, E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie ou non. On appellera **transvection** une application linéaire t telle qu'il existe un hyperplan H de E vérifiant les propriétés suivantes

i) $t \neq \mathrm{id}_E$;

ii) $\forall x \in H,\ t(x) = x$;

iii) $\forall x \in E,\ t(x) - x \in H$.

On rappelle qu'un hyperplan de E est un sous–espace vectoriel de E tel qu'il existe une droite vectorielle (sous–espace de dimension 1) D telle que $E = H \oplus D$.

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle T telle que

$$\forall x \in E, t(x) - x \in T.$$

On pourra considérer un vecteur $b \notin H$ et $a = t(b) - b$.

2. Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $\ker \varphi = H$. Montrer que l'on peut choisir $a \in H$ tel que

$$\forall x \in E,\ t(x) = x + \varphi(x)a.$$

3. Soit t_1 et t_2 deux transvections de E. À partir de l'expression précédente, donner une condition nécessaire et suffisante pour que t_1 et t_2 commutent.

4. On suppose que E est de dimension finie. Donner une matrice de t dans une base choisie judicieusement.

2 Fonction définie par une intégrale

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\tan^2 t}.$$

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Calculer f pour $x \neq -1$. On distinguera les cas où $x > 0$ et $x < 0$.

3. f est–elle continue en -1 ?

4. f est–elle dérivable en 0 ?

3 Formes et trace

Soit n un entier. On note dans la suite E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que tous ces coefficients sont nuls sauf le coefficient de coordonnées $(i,\, j)$ qui vaut 1

1. Montrer rapidement que l'ensemble des matrices $\{E_{ij},\ 1 \leqslant i,\, j \leqslant n\}$ est une base du $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer AE_{ij} et $E_{ij}A$ en fonction des coefficients de A que l'on appelera a_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Calculer les traces des ces matrices.

3. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à montrer qu'il existe une unique matrice A telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = \mathrm{tr}(AM). \tag{1}$$

tr désigne la trace. Exprimer a_{ij} avec f et une ou plusieurs matrices E. En déduire l'existence de A.

4. Calculer $f({}^tA\,)$ en fonction des coefficients de A Montrer que les propositions suivqntes sont équivalentes :

i) $f({}^tA\,) = 0\,;$

ii) $f = 0\,;$

iii) $A = 0.$

5. On suppose que l'on a deux matrices A et A' telles que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(A'M).$$

Montrer, en posant $M = {}^t(A - A')$, que $A = A'$. En déduire que la matrice A vérifiant (1) est unique.

4 Équation différentielle

Résoudre le système différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dot{x} & = & x & +y & +z \\ \dot{y} & = & & 2y & +z \\ \dot{z} & = & & & 2z. \end{array}\right.$$

Le point désigne la dérivation par rapport à la variable t. On remarquera que la matrice du système n'est pas diagonalisable, et on résoudra une équation du *second ordre* pour y en dérivant une des équations du système. Donner l'expression de $x(t)$ lorsque

$$\left\{\begin{array}{ll} x(0) & = 1 \\ x(\ln 2) & = 1 \\ \dot{x}(0) & = 1. \end{array}\right.$$

5 Primitives

Exprimer à l'aide des fonctions usuelles

$$\int \frac{\cos^3 2\theta}{\cos^3 \theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

$$\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x.$$

6 Limites

Calculer, à l'aide de développements limités, les limites

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x},$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{1-x} + \frac{1}{\ln x}.$$

7 Déterminants d'ordre n

Soit A une matrice d'ordre n. On considère la fonction $\Delta_n : x \mapsto \text{dét}(A + xI)$. En raisonnant éventuellement par récurrence sur n montrer que :

1. Δ_n est un polynôme de degré n.

2. Le coefficient de x^n est 1.

3. Le coefficient de x^{n-1} est $-\operatorname{tr} A$.

4. Le coefficient de x^0 est $\text{dét}A$.