

Travaux dirigés de mathématiques

Première séance

Groupe 1 : 7 février 2003 à 8h00

Groupe 2 : 7 février 2003 à 10h00

Groupe 3 : 14 février 2003 à 8h00

1 Sous-espaces vectoriels, applications linéaires

On considère deux K -espaces vectoriels E et F et u une application linéaire $u : E \rightarrow F$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Soit V un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $u(V)$ est un sous-espace vectoriel de F . La notation $u(V)$ désigne l'*image* de V par l'application linéaire u , c'est-à-dire l'ensemble des images de tous les points de V :

$$u(V) = \{y \in F \mid \exists x \in V, y = u(x)\}.$$

En déduire que $u(E)$ est un sous-espace vectoriel de F . Cet espace porte le nom d'**image** de u et est noté $\Im u$.

On considère également l'ensemble des éléments x de E tels que $u(x) = 0$. Montrer que cet ensemble, appelé le **noyau** de u est un sous-espace vectoriel de E . On le note

$$\text{Ker } u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}.$$

2 Les fonctions polynômes

On appelle $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exemple L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 3x - 7 \end{array}$$

est une application polynomiale de degré deux.

1. Montrer que muni de l'addition usuelle des fonctions de $\mathbb{R}$ et de la multiplication usuelle des réels, $\mathcal{P}_n$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Montrer qu'il est de dimension finie. Donner sa dimension et une base «pratique» que l'on notera $\mathcal{B}_n$.
2. Montrer que l'application suivante est une forme linéaire¹ sur $\mathcal{P}_n$

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}_n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto p(1). \end{aligned}$$

Quel est le noyau de f ? Quel est sa dimension ? Généraliser au noyau d'une forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie. On dit parfois que $\text{Ker } f$ est un **hyperplan**.

3. Montrer que l'application suivante est linéaire. Écrire sa matrice par rapport aux bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_{n-1}$.

$$\begin{aligned} d_n : \mathcal{P}_n &\longrightarrow \mathcal{P}_{n-1} \\ p &\longmapsto p'. \end{aligned}$$

Calculer la matrice de $d_{n-1} \circ d_n$. Montrer que $d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n$ est une forme linéaire que l'on explicitera.

4. On définit l'application $\pi : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ telle que l'image d'une application polynomiale $p \in \mathcal{P}_n$ par π est définie par

$$\begin{aligned} \pi(p) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{p(x)+p(-x)}{2}. \end{aligned}$$

Montrer que π est linéaire. Calculer l'image $\Im \pi$, quelles sont ces applications ? En déduire $\pi \circ \pi$. Calculer $\text{Ker } \pi$ et montrer que

$$\mathcal{P}_n = \Im \pi \oplus \text{Ker } \pi.$$

On dit que π est un **projecteur**, voyez-vous pourquoi ?

5. Calculer dans la base $\mathcal{B}_n$ la matrice A de l'application σ définie par

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{P}_n &\longrightarrow \mathcal{P}_n \\ p &\longmapsto \sigma(p) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p(1-x). \end{aligned}$$

Calculer sa matrice inverse. Montrer que A est une matrice de changement de base de $\mathcal{P}_n$. Calculer la matrice de π dans cette nouvelle base.

¹On rappelle qu'une forme linéaire est une application linéaire à valeur dans le corps des scalaires.

3 Calcul matriciel

1. Soit U_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$U_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculer U_n^2 puis U_n^k pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$(I_n + U_n)^p = I_n + \frac{(n+1)^p - 1}{n} U_n.$$

2. Montrer que si un vecteur X de dimension n est tel que $U_n X = \lambda X$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = n$. Pour ces deux valeurs de λ trouver un tel vecteur X *non nul*. On dit que X est *un vecteur propre* et que λ est *la valeur propre* associée au vecteur propre X .

L'ensemble des vecteurs propres ayant une valeur propre λ donnée est un sous-espace vectoriel appelé *le sous-espace propre* pour la valeur propre λ . L'ensemble des valeurs propres d'une application linéaire de E dans E (endomorphisme), ou d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé le **spectre** de l'endomorphisme ou de la matrice. Le spectre de U_n est $\{0, n\}$. Trouver les sous-espaces propres des deux valeurs propres et indiquer leurs dimensions.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme de degré n tel que $P(A) = 0$.² Montrer qu'une valeur propre de A est une racine du polynôme P .

3. Calculer les puissances successives de la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

4. On pose

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer AB . En utilisant la transposition, montrer que A et B ne commutent pas (c'est-à-dire que $AB \neq BA$).

²Un théorème (Cayley–Hamilton) assure qu'il existe toujours un tel polynôme.