Travaux dirigés de mathématiques

1 Limites

1.1 Limites d'une fonction

Étudier les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction

$$\begin{array}{rccc} : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{\mathrm{E}(ax)}{x} \end{array}$$

avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1.2 Fonction périodique

Soit f un fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **périodique**. Cela signifie qu'il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

T est appelée <u>une</u> période de de f. Une fonction périodique possède–t–elle plusieurs périodes ? Donner des exemples de fonctions périodiques et leur(s) périodes.

On suppose maintenant que f a une limite ℓ en $+\infty$. Montrer que f est constante. Quel est l'ensemble des périodes de f ?

2 Continuité

2.1 Fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$

On considère la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \begin{array}{rccc} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Cette fonction est–elle périodique ? Quel est l'ensemble de ses périodes ? Étudier la continuité de $\chi_{\mathbb{Q}}$ en chaque point de $\mathbb{R}$.

2.2 Applications continues et parties denses

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et D une partie dense de $\mathbb{R}$ sur laquelle f est nulle. Montrer que f est nulle en tout point de $\mathbb{R}$.

2.3 Théorème des valeurs intermédiaires

1. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

   Montrer que f s'annule au moins une fois.

2. Soit f une application continue de $[0,\, 1]$ dans $[0,\, 1]$. Montrer que f a un point fixe, c'est–à–dire un point $x_0 \in [0,\, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

2.4 Méthode de dichotomie

Soit f un fonction de $[a,\, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On cherche à résoudre *numériquement* l'équation

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

1. Justifier l'existence d'une solution à l'équation (1). Cette solution est–elle unique ?

2. On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et

$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

   Si $f(c_{n+1}) > 0$ on pose $a_{n+1} = c_{n+1}, b_{n+1} = b_n$ et si $f(c_{n+1}) < 0$ on pose $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_{n+1}$. (Si $f(c_{n+1}) = 0$ alors on a résolu l'équation et on arrête la méthode.) Quel est la largeur du segment $[a_n,\, b_n]$ pour n quelconque ? Montrer que ce segment contient toujours une solution de (1).

3. Si on cherche une solution approchée à $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ près de l'équation (1), quand doit–on arrêter la méthode de dichotomie ? Combien d'étapes a–t–on alors effectué ? En pratique, quelles autres limitations doit–on prendre en compte ?

4. Quels sont les avantages et les inconvénients de cette méthode ?