Évaluation

proposée par Vincent Rossetto

Cette évaluation est destinée à connaître votre niveau. Ce n'est pas un examen. Son but est de permettre à chacun de se situer par rapport au programme de l'année, et pour le professeur de faire un cours adapté. Répondez honnêtement aux questions, cela facilitera le travail de l'année. Pour chacune des questions donnez un niveau de réponse :

A - Je ne comprend pas les notations ;

B - Je comprend les notations, mais pas la question ;

C - Je comprend la question, mais je ne sais pas répondre ;

D - Je sais répondre.

En cas de réponse de niveau D, il faut aussi donner un résultat, même partiel. Certaines questions sont volontairement plus difficiles. Les questions sont toutes indépendantes, elles sont reliées chacune aux différentes parties du programme et l'ordre est quelconque. Il serait souhaitable que toutes les questions reçoivent au moins une lettre (A, B, C ou D).

---

1. Soit f la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,\,y) & \longmapsto & (x+y)\cos(xy) \end{array}$$

Calculer (seulement trois calculs à faire !) $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

2. **Calculer** les intégrales

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}, \qquad \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+3)}.$$

3. **Calculer** les séries suivantes :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

4. Soit $\lambda > 0$ un réel. **Calculer** la transformée de Fourier de la fonction

$$x \mapsto \exp(-\lambda|x|).$$

5. **Résoudre** l'équation différentielle

$$y' + x^k y = 0$$

dans les cas $k = -1$ et $k = 1$. Pour $k = 1$ déterminer la constante C telle que $\int_{\mathbb{R}} y(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

6. **Calculer** les déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. On définit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

i. **Calculer** AX.

ii. **Déterminer** toutes les valeurs propres de A ;

iii. A est-elle diagonalisable ?

iv. **Décomposer** X dans une base de vecteurs propres normés.

8. Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = x$.
Décomposer f en série de Fourier ;
à l'aide de l'égalité de Parseval en **déduire**

$$\sum_{k \geqslant 1} k^{-2}.$$