Travaux dirigés de mathématiques

1 Matrices

1.1 Inversibilité

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

À quelle condition est-elle inversible ? Si cette condition est vérifiée, calculer son inverse.

1.2 Calcul d'inverse

Calculer l'inverse de

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Que remarque-t-on ?

1.3 Matrice vectorielle de $\mathbb{R}^3$

Soit

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ -x & y & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice dans la base $\mathcal{E}$ d'une application ω. On suppose que $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Est-elle inversible ? Diagonalisable ? Peut-on la mettre sous forme de Jordan ?

En posant

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{V} = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{W} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

montrer que $\mathcal{B} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{W} \in \ker \Omega$. Calculer la matrice Ω' de ω dans la base $\mathcal{B}$.

2 Déterminants

2.1 Système

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ y & + & (m-1)y & + & z & = & m \\ x & + & 2y & + & mz & = & 1 \end{array}\right.$$

pour toutes les valeurs de $m \in \mathbb{R}$.

2.2 Un grand classique

Calculer le déterminant

$$\text{dét A} = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}.$$

Indication : en posant

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

on calculera dét (A+xU), en particulier on réfléchira au degré de l'application $x \mapsto$ dét (A + xU).