

La caractéristique d'Euler et le théorème de Gauss-Bonnet

V. Rossetto

1 Définitions

1.1 Genre d'une surface

On considère une variété compacte, sans bords et orientable \mathcal{V} de dimension 2. On peut donner une description topologique de \mathcal{V} avec un seul nombre entier g appelé le *genre* de \mathcal{V} . Deux surfaces de même genre sont homéomorphes.

1.2 Charge d'un champ de vecteurs en un point

Soit E un champ de vecteurs de dimension 2 sur \mathcal{V} tel que E ne s'annule qu'en des points isolés $\{x_p \in \mathcal{V}\}_{p \in P}$. Ainsi pour tout $x \in \mathcal{V}$, $E(x) \in T_x \mathcal{V} \simeq \mathbf{R}^2$. Au point x_p on définit la charge (ou l'indice) q_p par le nombre de tours que fait $E(x)$ lorsque x parcourt un lacet γ qui sépare \mathcal{V} en deux composantes connexes dont une d'elles ne contient que x_p et l'autre tous les autres x_n ($n \neq p$) (voir figure 1).

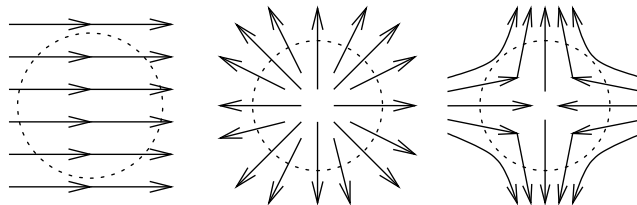


Figure 1: Charges topologiques 0, 1 et -1 , le contour γ est figuré en pointillé.

1.3 Caractéristique d'Euler

On définit la caractéristique d'Euler par

$$\chi_{\mathcal{V}}(E) = \sum_{p \in P} q_p \quad (1)$$

et on va montrer que cette quantité ne dépend que de \mathcal{V} et pas de E .

2 Notions de courbure

Soit \mathcal{V} un variété compacte sans bords orientable de dimension 2 munie d'une métrique \mathbf{g} . La mesure sur \mathcal{V} est alors $d^2S = \sqrt{\mathbf{g}} ds^1 ds^2$.

2.1 Courbure scalaire et transport parallèle

On rappelle que le transport parallèle d'un vecteur E sur un contour γ d'un ouvert $U_\gamma \subset \mathcal{V}$ le fait tourner d'un angle (voir l'annexe A)

$$\theta_\gamma = \frac{1}{2} \int_{U_\gamma} r d^2S \quad (2)$$

avec $r = \mathbf{g}^{jk} R^i_{ijk}$ la courbure scalaire (R^i_{jkl} est le tenseur de Riemann).

Si N^i est un champ de vecteurs de norme constante sur γ alors l'angle de rotation infinitésimal entre $N^i(x)$ et $N^i(x + dx)$ est noté $\Omega_i dx^i$ et la formule de Stokes nous donne

$$\theta_\gamma = \int_\gamma \Omega_i dx^i, \quad (3)$$

comme N^i est un champ de vecteur, il faut que θ soit un multiple entier de 2π , on remarque alors que cette définition coïncide avec la définition de la charge et donc que $\theta = 2\pi q_\gamma$ avec q_γ la charge totale contenue dans U_γ .

2.2 Courbure gaussienne

On peut également voir \mathcal{V} d'un point de vue extrinsèque, comme étant plongée dans une variété $\tilde{\mathcal{V}}$ de dimension supérieure (en général pour une variété de dimension 2 on choisit $\tilde{\mathcal{V}} = \mathbf{R}^3$). On notera $\tilde{\cdot}$ les objets extrinsèques.

Définissons les vecteurs $\tilde{\mathbf{K}}_{ij} = \tilde{D}_i \tilde{\ell}_j$ où $\tilde{\ell}_i$ est le vecteur $\tilde{D}_i \tilde{\mathbf{M}}$. Alors $\tilde{\mathbf{K}}_{ij}$ est normal à \mathcal{V} dans $\tilde{\mathcal{V}}^1$ et on note alors $\tilde{\mathbf{K}}_{ij} = \tilde{K}_{ij} \tilde{n}$, or \tilde{K}_{ij} est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable. On appelle K_1 et K_2 ses deux valeurs propres

$$\tilde{\mathbf{K}}_{ij} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}$$

dans une base $\{e_1, e_2\}$ du plan tangent à la surface. On appelle alors $r_i = 1/K_i$ le *rayon de courbure* de \mathcal{V} dans la direction de e_i , cette définition correspond à la notion usuelle de courbure extrinsèque. La courbure gaussienne est définie par

$$\tilde{K} = \det \tilde{\mathbf{K}}_{ij} = K_1 K_2 = \frac{1}{r_1 r_2}.$$

¹ en effet $\tilde{\mathbf{K}}_{ij} \cdot \tilde{\ell}_k = \tilde{D}_i(\tilde{\ell}_j) \cdot \tilde{\ell}_k = \tilde{D}_i(\tilde{\ell}_j \cdot \tilde{\ell}_k) - \tilde{\ell}_j \cdot (\tilde{D}_i \tilde{\ell}_k) = -\tilde{K}_{ki} \cdot \tilde{\ell}_j$. En répétant cette opération trois fois on trouve $\tilde{\mathbf{K}}_{ij} \cdot \tilde{\ell}_k = 0$.

2.3 Le théorème egregium

Nous avons donc défini d'une part la courbure scalaire r (intrinsèque) et la courbure gaussienne \tilde{K} (extrinsèque). Le théorème egregium de Gauss stipule (voir la démonstration en annexe B) :

$$\boxed{\tilde{K} = \frac{1}{2}r.}$$

3 Le théorème de Gauss-Bonnet

Soit E un champ de vecteurs de dimension 2 sur \mathcal{V} nul sur une famille de points isolés $\{x_p\}_{p \in P}$ et ayant en ces points des charges q_p . Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ et $\mathcal{D}_p^\varepsilon$ le disque centré sur x_p de rayon ε et \mathcal{C}_p sa frontière. On considère alors $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \setminus \cup_{p \in P} \mathcal{D}_p^\varepsilon$ et on pose

$$\forall x \in \mathcal{V}', N^i(x) = \frac{E^i(x)}{\sqrt{E^j(x)E_j(x)}}.$$

N^i étant normé, on peut considérer $\int_{\mathcal{C}_p} \Omega_i dx^i = 2\pi q_p = 2\pi q_p$. En découpant \mathcal{V} en ouvert ne contenant aucune charge, on voit que l'intégrale

$$\int_{\mathcal{V}'} r d^2S$$

vaut d'après la section 2.1

$$2 \sum_{p \in P} \theta_p = \sum_{p \in P} 4\pi q_p = 4\pi \chi_{\mathcal{V}}(E).$$

$$\text{Or } \int_{\mathcal{V}} r d^2S = \int_{\mathcal{V}'} r d^2S + O(\varepsilon^2)$$

ce qui nous permet de conclure que $\chi_{\mathcal{V}}(E)$ ne dépend pas de E car $\int_{\mathcal{V}} r d^2S$ n'en dépend pas. On notera alors désormais $\chi_{\mathcal{V}}$.

$$\chi_{\mathcal{V}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} r d^2S \quad (4)$$

Il nous reste maintenant à calculer $\chi_{\mathcal{V}}$ pour les variétés compactes sans bords de dimension 2. Pour cela, on utilise un champ de vecteurs particulier sur une surface de genre g : on se place dans $\tilde{\mathcal{V}} = \mathbf{R}^3$, on choisit un champ de vecteurs dans \mathbf{R}^3 et on le projette sur le plan tangent à \mathcal{V} en tout point. On définit ainsi un champ de vecteurs sur \mathcal{V} . Il reste ensuite à compter la charge topologique totale et utiliser (1). La figure 2 permet de voir que

$$\boxed{\chi_{\mathcal{V}} = 2(1 - g_{\mathcal{V}})} \quad (5)$$

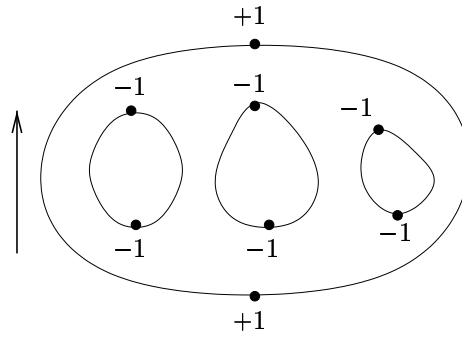


Figure 2: Calcul de $\chi_{\mathcal{V}}$. On projette un champ de vecteurs constant de \mathbf{R}^3 sur \mathcal{V} . Les points d'annulation sont alors les points où le plan tangent est horizontal. Les points de courbure positive ont une charge $+1$, ceux de courbure négative un charge -1 . Ici, on a $\chi_{\mathcal{V}} = -4 = 2(1 - 3)$.

On peut alors énoncer le théorème de Gauss-Bonnet

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \tilde{K} \, d^2S = 4\pi(1 - g)} \quad (6)$$

◇◇◇
◇◇
◇

A Transport parallèle d'un vecteur sur un lacet

Notons D_i la dérivation covariante sur \mathcal{V}

$$D_i E^j = \partial_i E^j + \Gamma^i_{jk} E^k.$$

Le tenseur de Riemann est défini par son action sur un champ de vecteurs E :

$$R^k_{\ell ij} E^\ell = [D_i, D_j] E^k$$

(le crochet désigne le crochet de Lie). Ce qui signifie que si l'on déplace parallèlement un vecteur E^i sur les côtés d'un parallélogramme infinitésimal engendré par u_i et v_i , le nouveau vecteur E'^i diffère de E^i selon :

$$E'^k - E^k = R^k_{\ell ij} u^i v^j E^\ell.$$

Le vecteur a donc tourné et la matrice de rotation associée à ce déplacement s'écrit $\delta^k_\ell - u^i v^j R^k_{\ell ij}$. Écrivons l'angle de rotation $\delta\theta = u^i v^j \theta_{ij}$. Comme $R^k_{\ell ij}$ est antisymétrique en les indices (k, ℓ) et (i, j) , on peut écrire

$$R^k_{\ell ij} = \xi^k_\ell \xi_{ij} \frac{r}{2}$$

en appelant r la courbure scalaire, ainsi $\theta_{ij} = \xi_{ij} \frac{r}{2}$. Lors du transport parallèle d'un vecteur le long d'un lacet $\gamma \subset \mathcal{V}$ fermé, le vecteur tourne donc d'un angle

$$\theta = \frac{1}{2} \int_{U_\gamma} r dx^i dx^j \xi_{ij} = \frac{1}{2} \int_{U_\gamma} r d^2S$$

où U_γ est un l'ouvert de frontière l'image de γ . Pour obtenir ce résultat, il suffit de découper U_γ en parallélogrammes infinitésimaux.

B Démonstration du théorème egregium de Gauss

Il existe de nombreuses démonstrations fausses du théorème egregium de Gauss dans la littérature. Dès que j'ai quelque chose de satisfaisant, je la reporte ici.