

Polymères, membranes
&
renormalisation

Sommaire

Préface	v
1 Premières notions sur les polymères	1
2 Interaction d'un brownien avec une impureté	9
3 Évitement de deux browniens	19
4 Polymères autoévitants	25
5 Membranes polymérisées	37
A Introduction au calcul stochastique	48
B Les martingales	56
Listes des figures	63
Bibliographie	64

Préface

Ce recueil reprend le cours donné dans le cadre de l'école doctorale de physique fondamentale de Paris au cours de l'année 2000 dénommé « Polymères, membranes et renormalisation » donné à l'Institut Henri Poincaré par les messieurs Bertrand Duplantier de l'Institut Henri Poincaré, Jean-François Legall de l'École normale supérieure et Marc Yor de l'université Pierre et Marie Curie.

Il s'adresse plus particulièrement à des étudiants de 3^{ème} cycle ayant de bonnes connaissances en physique théorique. En particulier, il est préférable d'avoir déjà suivi un cours de théorie des champs abordant la renormalisation pour saisir toute la pertinence du propos. Les annexes regroupent les cours faits par les mathématiciens ayant enseigné dans ce cours. Là encore, il est bon d'avoir des connaissances de base en théorie de la mesure et intégrale de Lebesgue pour suivre ces développements. Néanmoins, leur lecture n'est pas indispensable au cours proprement dit, ils apportent un nouvel éclairage sur ce que savent faire les mathématiciens dans ce domaine, c'est pourquoi ils sont situés en annexe.

Chapitre 1

Premières notions sur les polymères

1.1 Marches aléatoires

1.1.1 Définition

Parlons tout d'abord des marches aléatoires sur un réseau. Par exemple la marche aléatoire de \mathbf{x} sur $(a\mathbf{Z})^d$. Au temps initial $t = 0$, \mathbf{x} est au point $(0,0, \dots, 0)$. Le temps est également discret, il sera pris dans \mathbf{N} . On note u_i le déplacement effectué pour aller de \mathbf{x}_i à \mathbf{x}_{i+1} et $\mathbf{R}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0$ le déplacement total depuis le départ de la marche.

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{u}_i \quad (1.1)$$

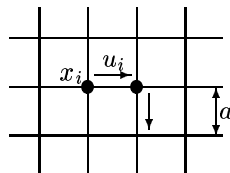


FIG. 1.1: Marche aléatoire sur $(a\mathbf{Z})^2$

Les déplacements ont tous pour longueur a , et ils ont lieu le long des axes du réseau. On dit que notre marche est aléatoire car chaque déplacement u_i est une variable aléatoire indépendante des autres et de moyenne nulle :

$$\langle \mathbf{u}_i \rangle = 0; \quad \mathbf{u}_i^2 = a^2. \quad (1.2)$$

Calculons alors, grâce à la relation (1.1)

$$\langle R^2 \rangle = \left\langle \sum_{i,j} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j \right\rangle = \sum_{i \neq j} \langle \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j \rangle + \sum_i \langle \mathbf{u}_i^2 \rangle = na^2. \quad (1.3)$$

Car comme les variables \mathbf{u}_i sont indépendantes, on a pour $i \neq j$ $\langle \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j \rangle = 0$. Comme dans les processus de diffusion, \mathbf{x} s'éloigne à une distance moyenne proportionnelle à \sqrt{t} de son origine.

On va maintenant définir un polymère comme une marche aléatoire auto-évitante d'une longueur donnée, à la grande différence que le chemin est donné à $t = 0$ et qu'il évolue dans le temps. On désignera par *brownien* une marche aléatoire libre qui évolue dans le temps, de longueur fixée pouvant être infinie.

1.1.2 Rappel : intégrales gaussiennes

Soit M une matrice de taille $d \times d$. L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{k} e^{-\frac{1}{2} {}^t \mathbf{k} M \mathbf{k}} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

est appelée intégrale gaussienne. Elle vaut

$$(2\pi)^{d/2} (\det M)^{-d/2} e^{-\frac{1}{2} {}^t \mathbf{x} M^{-1} \mathbf{x}}. \quad (1.4)$$

De même lorsque l'on a une intégrale n -uple

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{i=1}^n d^d \mathbf{y}_i \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n {}^t \mathbf{y}_i M_{ij} \mathbf{y}_j + i \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{x}_i \right) \\ = (2\pi)^{nd/2} (\det_n M)^{-d/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n {}^t \mathbf{x}_i (M^{-1})_{ij} \mathbf{x}_j \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.1.3 Passage à la limite continue

On part de la marche aléatoire sur réseau décrite dans la section 1.1, mais cette fois, l'intervalle de temps entre deux déplacements est τ et non plus 1. On note $P(\mathbf{x}, t)$ la probabilité de se trouver au point \mathbf{x} au bout d'un temps t . Au temps $t + \tau$, on peut venir de n'importe quel point voisin avec la même probabilité $\frac{1}{2d}$, car un point de $(a\mathbf{Z})^d$ possède exactement $2d$ voisins, ce qui s'exprime par

$$P(\mathbf{x}, t + \tau) = \frac{1}{2d} \sum_{\mathbf{x}' \text{ voisin de } \mathbf{x}} P(\mathbf{x}', t). \quad (1.6)$$

Cette équation est analogue à une équation de diffusion. En effet posons

$$\Delta_{(d)}f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2d} \sum_{\mu=1}^d (f(\mathbf{x} + a\mathbf{e}_\mu) + f(\mathbf{x} - a\mathbf{e}_\mu) - 2f(\mathbf{x})), \quad (1.7)$$

$\Delta_{(d)}$ est l'opérateur *laplacien discret* et $(\mathbf{e}_\mu)_{1 \leq \mu \leq d}$ est une base de \mathbf{Z}^d . L'équation (1.6) peut aussi s'écrire comme une équation de diffusion discrète pour P

$$P(\mathbf{x}, t + \tau) - P(\mathbf{x}, t) = \Delta_{(d)}P(\mathbf{x}, t). \quad (1.8)$$

On voit alors que $(P(\mathbf{x}, t + \tau) - P(\mathbf{x}, t))/\tau \rightarrow \frac{\partial P}{\partial t}$ lorsque τ tend vers 0. De même $(\Delta_{(d)}P)/a^2$ tend vers le laplacien continu. On en conclue que la limite continue, qui $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{a^2}{2d\tau} \Delta P$ sera obtenue en conservant le rapport $D = \frac{a^2}{2d\tau}$ fini.

On définit la transformée de Fourier de P dans la première zone de Brillouin,

$$P(\mathbf{x}, t) = a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \hat{P}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}; \quad \hat{P}(\mathbf{k}, t) = \sum_{\mathbf{x} \in (a\mathbf{Z})^d} P(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (1.9)$$

Écrivons alors l'équation (1.6) pour \hat{P} :

$$\hat{P}(\mathbf{k}, t + \tau) = \frac{1}{2d} \hat{P}(\mathbf{k}, t) \sum_{\mu=1}^d e^{iak \cdot \mathbf{e}_\mu} + e^{-iak \cdot \mathbf{e}_\mu} = \frac{1}{d} \left(\sum_{\mu=1}^d \cos(k_\mu a) \right) \hat{P}(\mathbf{k}, t). \quad (1.10)$$

On itère cette relation entre $\hat{P}(\mathbf{k}, t + \tau)$ et $\hat{P}(\mathbf{k}, t)$ jusqu'à l'origine temporelle

$$\hat{P}(\mathbf{k}, t) = \left(\sum_{\mu=1}^d \cos(k_\mu a) \right)^{t/\tau} \hat{P}(\mathbf{k}, 0). \quad (1.11)$$

Or à $t = 0$, $\mathbf{x} = 0$. Donc $P(\mathbf{x}, 0) = \delta_{\mathbf{x}, 0}$ d'où $\hat{P}(\mathbf{k}, 0) = 1$. On veut maintenant une expression dans l'espace réel,

$$P(\mathbf{x}, t) = a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left(\sum_{\mu=1}^d \cos(k_\mu a) \right)^{t/\tau} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.12)$$

dans laquelle on peut prendre la limite $a \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$. $\cos(k_\mu a) \simeq 1 - \frac{1}{2}k_\mu^2 a^2$, $\frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos(k_\mu a) \simeq 1 - \frac{1}{2d} \mathbf{k}^2 a^2$ et finalement

$$\left(1 - \frac{1}{2d} \mathbf{k}^2 a^2 \right)^{t/\tau} = e^{\frac{t}{\tau} \ln(1 - \frac{1}{2d} a^2 \mathbf{k}^2)} \simeq e^{-\frac{t}{\tau} \frac{\mathbf{k}^2 a^2}{2d}}. \quad (1.13)$$

Si le rapport a^2/τ reste fini, on obtient une expression pertinente. On définit la constante $D = \frac{a^2}{2d\tau}$, appelée *coefficient de diffusion*, et on fait tendre a et τ vers 0.

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0 \\ D = \frac{a^2}{2d\tau} \text{ constante}}} \frac{1}{a^d} P(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-D \mathbf{k}^2 t}, \quad (1.14)$$

est une intégrale *gaussienne*, on utilise le résultat (1.4) avec $M = 2Dt\mathbf{1}_d$. On obtient donc le résultat final pour une marche aléatoire continue

$$\boxed{P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4Dt}\right)}. \quad (1.15)$$

La marche aléatoire est un processus markovien, c'est-à-dire que la probabilité d'un événement ne dépend pas du passé. Cela se traduit mathématiquement par

$$\int_{\mathbf{R}^d} dt \int_{\mathbf{R}^d} d\mathbf{x} P(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, t' - t) P(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}', t'). \quad (1.16)$$

Notons B_t la position d'un mouvement brownien après le temps t , le processus est invariant dans le temps, donc si $t_2 > t_1$

$$P(B_{t_2} - B_{t_1} = \mathbf{x}) = P(\mathbf{x}, t_2 - t_1). \quad (1.17)$$

On peut alors calculer le propagateur

$$\left\langle e^{i\mathbf{q} \cdot (B_{t_2} - B_{t_1})} \right\rangle_0 = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} d^d \mathbf{x} e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{4D|t_2 - t_1|}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} = e^{-D\mathbf{q}^2 |t_2 - t_1|}, \quad (1.18)$$

qui devient en transformée de Laplace de paramètre m^2 , un propagateur de Feynman :

$$\int_0^\infty e^{-D\mathbf{q}^2 t} e^{-m^2 t} dt = \frac{1}{D\mathbf{q}^2 + m^2}.$$

Ce qui constitue un premier indice sur une dualité entre la théorie des champs et la diffusion brownienne.

1.2 Le modèle d'Edwards

1.2.1 Historique

Le modèle d'Edwards a été introduit en 1965. Il décrit un mouvement brownien dans \mathbf{R}^d en auto-interaction. Le résultat central donné par ce modèle est l'existence, en toutes dimensions, d'un exposant critique universel, ν , tel que

$$\langle R_N^2 \rangle \sim N^{2\nu} \quad (1.19)$$

En dimension 2, $\nu = 3/4$ (résultat exact prouvé par Niemhuis en 1982), en dimension 3, $\nu \simeq 0,588$. Pour le mouvement brownien, l'exposant est 1/2 (équation 1.3) dans toutes les dimensions.

Ce modèle permet de calculer d'autres exposants critiques, comme celui d'un polymère à quatre branches, ν_L , celui de la distribution de probabilité de distance entre deux polymères, θ^1 . On montre aussi par exemple que la probabilité que deux polymères en présence l'un de l'autre ne s'intersectent pas au bout d'un temps t est proportionnelle à $t^{-\zeta_2}$, l'exposant critique ζ_2 valant $5/8$ en dimension 2.

Signalons enfin qu'en 1972, Pierre-Gilles de Gennes a montré que les modèles de polymères sont liés à la théorie des champs pour les transitions de phase en utilisant le modèle d'Edwards.

1.2.2 Nécessité de l'intégrale fonctionnelle

On connaît la mesure de la probabilité pour une particule qui diffuse toute seule. Pour étudier les polymères, on a besoin d'une mesure sur l'ensemble des configurations de l'objet, c'est-à-dire que l'on veut connaître

$$P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$$

lorsque n tend vers l'infini, $\{\mathbf{x}_n\}$ parcourant à la limite l'ensemble des points du brownien.

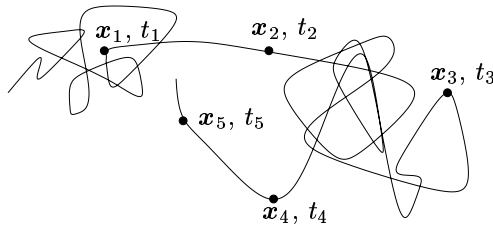


FIG. 1.2: Dans un brownien, chaque point suit une marche aléatoire. Pour décrire le brownien, il faut prendre en compte toutes les configurations possibles.

Dans toute la suite, on utilise la valeur normalisée $D = \frac{1}{2}$. D'après le résultat (1.15) et grâce à l'indépendance de chaque point, on obtient

$$P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \left(\prod_{i=1}^n 2\pi(t_{i+1} - t_i) \right)^{-d/2} e^{-\frac{\mathbf{x}_1^2}{2t_1}} e^{-\frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2}{2(t_2 - t_1)}} \dots e^{-\frac{(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1})^2}{2(t_n - t_{n-1})}}, \quad (1.20)$$

1. Ces deux cas sont d'ailleurs reliés par le fait qu'ils possèdent chacun quatre branches libres, ce qui a pour conséquence qu'une fonction relie ν_L à θ .

la mesure associée étant $\prod_{i=1}^n d^d \mathbf{x}_i$. Lorsque n tend vers $+\infty$, cette mesure de probabilité tend vers

$$\mathcal{D}\mathbf{x}(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\tau)\right)^2 d\tau\right), \quad (1.21)$$

où $\mathcal{D}\mathbf{x}(t)$ représente la limite de

$$\prod_{i=1}^n \frac{d^d \mathbf{x}_i}{2\pi(t_i - t_{i-1})}.$$

En mathématiques (1.21) s'appelle la mesure de Wiener, elle est parfois notée $d\mathcal{W}(t)$. Le modèle d'Edwards est construit à partir de cette mesure. On notera désormais la moyenne statistique sur l'ensemble des configurations d'un brownien pour une quantité $\Phi[\mathbf{x}(t)]$

$$\langle \Phi[\mathbf{x}(t)] \rangle_0 = \int \mathcal{D}\mathbf{x}(t) \Phi[\mathbf{x}(t)] \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \dot{\mathbf{x}}^2(\tau) d\tau\right). \quad (1.22)$$

1.2.3 Calcul du propagateur avec l'intégrale fonctionnelle

On recalcule le propagateur déjà vu dans la formule (1.18) avec le nouvel outil qu'est la mesure de Wiener

$$\begin{aligned} \langle e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{B}_{t_2} - \mathbf{B}_{t_1})} \rangle_0 &= \int \mathcal{D}\mathbf{x}(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \dot{\mathbf{x}}^2(t') dt'\right) \\ &\quad \times \exp\left(i\mathbf{q} \cdot \int_0^t dt' \dot{\mathbf{x}}(t') \theta(t_2 - t') \theta(t' - t_1)\right). \end{aligned}$$

Or, on a l'égalité $\mathcal{D}\mathbf{x}(t) = d^d \mathbf{x}(0) \mathcal{D}' \dot{\mathbf{x}}(t)$, car $\mathbf{x}(t)$ ne dépend que de $\mathbf{x}(0)$ et de $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ². Ainsi on peut se ramener à une intégrale gaussienne

$$\begin{aligned} \langle e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{B}_{t_2} - \mathbf{B}_{t_1})} \rangle_0 &= \int d^d \mathbf{x}(0) \mathcal{D}' \dot{\mathbf{x}}(t) \exp\left(i\mathbf{q} \cdot \int_0^t dt' \dot{\mathbf{x}}(t') \theta(t_2 - t') \theta(t' - t_1)\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \dot{\mathbf{x}}(t') \delta(t' - t'') \dot{\mathbf{x}}(t'')\right), \\ &= \int d^d \mathbf{x}(0) \mathcal{D}' \dot{\mathbf{x}}(t) (2\pi)^{nd/2} (\det_n \delta)^{-d/2} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \mathbf{q} \theta(t_2 - t') \theta(t' - t_1) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \delta(t' - t'') \mathbf{q} \theta(t_2 - t'') \theta(t'' - t_1)\right). \end{aligned}$$

² \mathcal{D}' est quant à elle inconnue...

Pour calculer cette intégrale, on remarque que la valeur pour $\mathbf{q} = 0$ est connue, ce qui nous sert à normaliser. On obtient le résultat

$$\begin{aligned} \left\langle e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{B}_{t_2} - \mathbf{B}_{t_1})} \right\rangle_0 &= \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t dt' \mathbf{q}^2 \theta(t_2 - t') \theta(t' - t_1) \right), \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{q}^2 |t_2 - t_1| \right), \end{aligned} \quad (1.23)$$

qui est bien le même que (1.18). L'intégrale fonctionnelle contient bien l'information sur le brownien.

1.3 Intersection d'objets aléatoires

Remarquons tout d'abord que la dimension de Hausdorff d'un *brownien* est

$$D_H = \frac{1}{\nu} = 2. \quad (1.24)$$

Puis plaçons-nous dans un espace de dimension d dans lequel sont présents deux objets de dimensions D_1 et D_2 . Si

$$D_1 + D_2 \geq d$$

les deux objets s'intersectent. Par exemple, si nos deux objets sont des browniens, ils s'intersectent si $d \leq 4$. On en déduit que dans une dimension $d > 4$ un polymère s'auto-évite *de facto*, il est donc, dans ces dimensions supérieures, équivalent à un brownien.

Étendons maintenant ces considérations à un ensemble de plus de deux éléments. Il faut en fait considérer les *codimensions* des objets, ce sont elles qui s'ajoutent. La codimension de l'objet \mathcal{D}_i de dimension D_i est

$$\text{codim } \mathcal{D}_i = d - D_i, \quad (1.25)$$

c'est le nombre d'équations qui définissent \mathcal{D}_i dans \mathbf{R}^d . L'intersection des objets \mathcal{D}_i est définie par la réunion des équations de chacun des \mathcal{D}_i .

$$\begin{aligned} \text{codim } \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}_i &= \sum_{i=1}^n \text{codim } \mathcal{D}_i, \\ d - \dim \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}_i &= nd - \sum_{i=1}^n \dim \mathcal{D}_i, \\ \dim \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}_i &= \sum_{i=1}^n D_i - (n-1)d. \end{aligned}$$

C'est un problème non trivial si $\dim \bigcap_i \mathcal{D}_i \geq 0$. Il y a donc intersection de ces objets en dessous d'une dimension, dite dimension critique, c'est-à-dire si

$$d \leq \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n-1}. \quad (1.26)$$

Ainsi la dimension critique pour l'intersection de trois browniens est 3, c'est à dire la même que pour une théorie des champs en φ^6 . Cela peut se voir si on imagine que chaque propagateur dans les diagrammes de Feynman de la théorie sont des browniens. Il faut alors se demander s'ils peuvent former les diagrammes, c'est à dire s'ils s'intersectent. Cette analogie sera développée ultérieurement.

Chapitre 2

Interaction d'un brownien avec une impureté

Le but de ce chapitre est de mettre en œuvre le modèle d'Edwards sur un premier exemple. On considère un brownien en présence d'une impureté située en $\mathbf{r} = 0$ dans un espace de dimension d . On pose

$$s = 2Dt$$

ce qui revient à définir un temps s pour lequel $D = \frac{1}{2}$, temps qui joue le rôle d'« abscisse curviligne » pour le brownien, variant de 0 à S .

2.1 La fonction de partition

2.1.1 Calcul de la fonction de partition

L'interaction entre le brownien et l'impureté a pour expression

$$b \int_0^S \delta^d(\mathbf{r}(s)) ds, \quad (2.1)$$

la dimension de b est donc $[L^{d-2}]$. On attribue à une configuration donnée son poids de Gibbs ce qui donne pour la fonction de partition du système

$$\int \mathcal{D}\mathbf{r}(s) e^{-\frac{1}{2} \int_0^S \dot{\mathbf{r}}(s)^2 ds - b \int_0^S \delta^d(\mathbf{r}(s)) ds}. \quad (2.2)$$

$\int \delta^d(\mathbf{r}(s)) ds$ est appelé le *temps local*, c'est en effet le temps passé par le brownien à l'origine.

Il nous faut normaliser notre fonction de partition pour pouvoir la calculer. On décide que la fonction de partition d'un brownien commençant à l'origine et sans interaction vaut 1 :

$$\int_{\mathbf{r}(0)=0} \mathcal{D}\mathbf{r}(s) e^{-\frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{r}}^2 ds} = 1 \quad \text{et} \quad \int \mathcal{D}\mathbf{r}(s) e^{-\frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{r}}^2 ds} = \mathcal{V}_{\mathbf{R}^d}$$

Pour contourner le problème du terme de volume $\mathcal{V}_{\mathbf{R}^d}$, on définit

$$\mathcal{Z}_2^c = \int \mathcal{D}\mathbf{r}(s) e^{-\frac{1}{2} \int_0^S \dot{\mathbf{r}}^2(s) ds - b \int_0^S \delta^d(\mathbf{r}(s)) ds} - \int \mathcal{D}\mathbf{r}(s) e^{-\frac{1}{2} \int_0^S \dot{\mathbf{r}}^2(s) ds}, \quad (2.3)$$

en retirant simplement le terme de volume de (2.2) qui correspond au cas où il n'y a pas d'interaction. Ainsi \mathcal{Z}_2^c désigne la fonction de partition connexe, c'est-à-dire qu'il y a toujours au moins un passage à l'origine. On peut l'exprimer sous forme de moyenne statistique, comme vu au (1.22)

$$\mathcal{Z}_2^c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-b)^n}{n!} \int d\mathbf{r}(0) \int_0^S ds_1 \dots \int_0^S ds_n \langle \delta^d(\mathbf{r}(s_1)) \delta^d(\mathbf{r}(s_2)) \dots \delta^d(\mathbf{r}(s_n)) \rangle_0. \quad (2.4)$$

En réordonnant les temps, le facteur $\frac{1}{n!}$ disparaît, et

$$\mathcal{Z}_2^c = \sum_{n=1}^{\infty} (-b)^n \int d\mathbf{r}(0) \int_{0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq S} ds_1 \dots ds_n \langle \delta^d(\mathbf{r}(s_1)) \delta^d(\mathbf{r}(s_2)) \dots \delta^d(\mathbf{r}(s_n)) \rangle_0. \quad (2.5)$$

Réécrivons les arguments des fonctions δ^d de Dirac de la façon suivante

$$\delta^d(\mathbf{r}(s_1)) \delta^d(\mathbf{r}(s_2)) \dots \delta^d(\mathbf{r}(s_n)) = \delta^d(\mathbf{r}(s_1)) \delta^d(\mathbf{r}(s_2) - \mathbf{r}(s_1)) \dots \delta^d(\mathbf{r}(s_n) - \mathbf{r}(s_{n-1}))$$

et transformons ces fonctions δ^d par

$$\delta^d(\mathbf{r}(s_i)) = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{d^d \mathbf{q}_i}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r}(s_i)},$$

enfin remplaçons $\exp(i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{r}(s_1))$ par

$$e^{i\mathbf{q}_1 \cdot (\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{r}(0))} e^{i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{r}(0)}.$$

Dans l'expression obtenue, l'intégrale selon $\mathbf{r}(0)$ vaut 1, ce qui donne finalement la formule

$$\mathcal{Z}_2^c = \sum_{n=1}^{\infty} (-b)^n \int \prod_{i=1}^n ds_i \prod_{j=2}^n \int \frac{d^d \mathbf{q}_j}{(2\pi)^d} \left\langle e^{i\mathbf{q}_j \cdot (\mathbf{r}(s_i) - \mathbf{r}(s_{i-1}))} \right\rangle_0, \quad (2.6)$$

dans laquelle on reconnaît l'expression du propagateur calculé en (1.18), d'où

$$\mathcal{Z}_2^c = \sum_{n=1}^{\infty} (-b)^n \int \prod_{i=1}^n ds_i \prod_{i=2}^n (2\pi(s_i - s_{i-1}))^{-d/2}. \quad (2.7)$$

$0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq S$

Comment peut-on interpréter cette expression? Souvenons-nous que la probabilité de retour à l'origine au bout d'un temps s est $(2\pi s)^{-d/2}$ grâce à l'expression (1.15). Ainsi, on voit apparaître la probabilité de retour à l'origine aux temps $s_1, s_2, \text{etc.}, s_n$. \mathcal{Z}_2^c est donc la valeur moyenne de l'interaction entre le brownien et l'impureté.

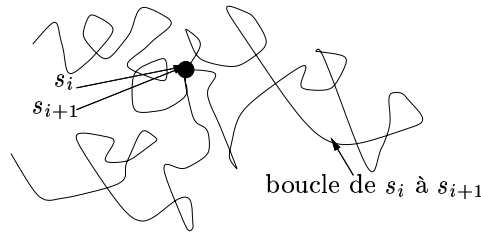


FIG. 2.1: Le brownien est en interaction avec l'impureté. Il fait une boucle et revient à l'origine après un temps $s_{i+1} - s_i$.

Si on s'intéresse à l'interaction entre un brownien et une droite, le résultat est le même, il suffit de remplacer d par $d-1$ dans l'expression (2.7). Par projection, pour étudier l'interaction d'un brownien avec un sous-espace de dimension p , il faut remplacer d par $d-p$.

Pour améliorer l'expression (2.7), on effectue dans l'intégrale un changement de variables en posant pour $1 \leq i \leq n-1$

$$\sigma_i = \frac{s_{i+1} - s_i}{S},$$

σ_i varie donc entre 0 et 1. Mais l'intégrale de (2.7) comporte n variables, il faut donc introduire également σ_n dans notre changement de variable. Les σ_i doivent vérifier

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i = 1$$

pour cela, on introduit dans l'intégrale un terme $\delta^d(\sum \sigma_i)$. Mais la variable σ_n n'apparaît nulle part ailleurs, ainsi on peut intégrer immédiatement sur σ_n . On obtient l'expression normalisée

$$\mathcal{Z}_2^c = -bS \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \int_0^1 \prod_{i=1}^{n-1} d\sigma_i \theta\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i\right) \prod_{i=1}^{n-1} \sigma_i^{-d/2}, \quad (2.8)$$

où on a posé

$$\boxed{z = -bS(2\pi)^{-d/2}}. \quad (2.9)$$

2.1.2 Calcul des termes de la série

On appelle I_n les termes de la série (2.8) :

$$I_n = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n d\sigma_i \left(1 - \sum_{i=1}^n \sigma_i\right) \theta \left(1 - \sum_{i=1}^n \sigma_i\right) \prod_{i=1}^n \sigma_i^{-d/2}, \quad (2.10)$$

de sorte que la série s'écrit

$$\mathcal{Z}_2^c = -bS \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n I_n. \quad (2.11)$$

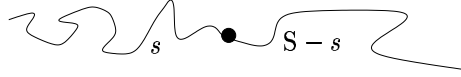


FIG. 2.2: Le mouvement brownien représenté n'est en interaction avec l'impureté qu'une seule fois : au temps s . On voit alors nettement que la fonction de partition de cette configuration est le produit de deux fonctions de partitions de brownien commençant à l'origine.

Pour $n = 0$, $I_0 = 1$ car cela correspond à un seul passage du brownien à l'origine : il n'y a pas de boucle. La fonction de partition pour un tel objet est donc

$$-b \int_0^S ds \mathcal{Z}_0(S-s) \mathcal{Z}_0(s) = -bS.$$

où \mathcal{Z}_0 est la fonction de partition d'un brownien commençant à l'origine et sa valeur est 1 comme défini page 10.

Pour calculer le terme d'ordre n , on va transformer la fonction de Heaviside θ en intégrale. Soit \mathcal{D} une droite verticale du plan complexe \mathbf{C} , d'abscisse positive. L'illustration de la figure 2.3 montre que

$$\theta(x) = \int_{\mathcal{D}} e^{xu} \frac{du}{2i\pi u}. \quad (2.12)$$

De même, comme $\exp ux = \sum_n \frac{x^n u^n}{n!}$ le résidu de e^{ux}/u^{n+1} est $x^n/n!$, d'où l'égalité pour $n \in \mathbf{N}$:

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{e^{ux}}{u^n} \frac{du}{2i\pi u} = \frac{x^n}{n!} \theta(x) = \theta_n(x). \quad (2.13)$$

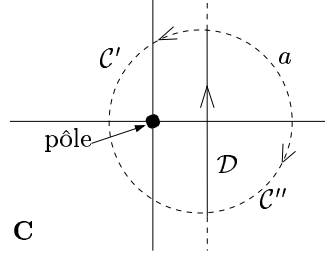


FIG. 2.3: Transformation de $\theta(x)$ en intégrale grâce au théorème des résidus. L'intégrale sur le cercle en pointillé vaut 1. Si $x > 0$, il faut passer sur C' car ainsi $\exp ux$ tend vers 0 et l'intégrale converge lorsque a , le rayon du cercle $C' \cup C''$, tend vers l'infini, alors que si $x < 0$, il faut choisir C'' ce qui donne clairement 0.

Dans le calcul de I_n , en posant $x = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i$, intervient le terme

$$\theta_1(x) = x\theta(x) = \int_{\mathcal{D}} \frac{du}{2i\pi u^2} e^u e^{-u \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i},$$

Ce qui transforme l'intégrale (2.10) en intégrale sur u d'un produit d'intégrales valant chacune

$$f(u, d) = \int_0^\infty e^{-u\sigma} \sigma^{-d/2} d\sigma = u^{-1+\frac{d}{2}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right), \quad (2.14)$$

lorsque $d < 2$. Si $d = 2$ il faut introduire un cut-off. Ainsi on obtient une expression pour I_n

$$I_n = \int_{\mathcal{D}} \frac{du}{2i\pi u^2} \left[u^{\frac{d}{2}-1} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \right]^n. \quad (2.15)$$

En dimension $d > 2$, il y a divergence à l'origine de l'intégrale (2.14). Pour calculer I_n on doit alors faire un prolongement analytique de la fonction définie sur $[0, 2]$. Il faut en ce cas introduire un cut-off. Dans le cas où le couplage à l'impureté est fort¹, il y a en effet divergence ultra-violette car en dimension $d > 2$, on s'échappe plus difficilement de l'origine.

Achevons maintenant le calcul de I_n . Comme pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a $\theta_n(1) = \frac{1}{n!}$, on peut prolonger analytiquement ce résultat, grâce au théorème de Carlson, qui nous donne la formule

$$\int_{\mathcal{D}} e^u \frac{du}{2i\pi u^\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}, \quad (2.16)$$

d'où

$$I_n = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)^n}{\Gamma\left(2 + n\left(1 - \frac{d}{2}\right)\right)}. \quad (2.17)$$

1. Dans les grandes dimensions, l'effet de l'impureté tend vers 0.

2.2 Renormalisation

2.2.1 Renormalisation de la constante de couplage

La constante de couplage nu , z , se renormalise en une constante de couplage effective, notée g et appelée *constante de couplage renormalisée*,

$$g = \frac{\mathcal{Z}_2^c}{(2\pi\mathcal{S})^{d/2}} = z \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \mathbb{I}_n. \quad (2.18)$$

Physiquement, on s'intéresse au cas limite où z tend vers l'infini, qui correspond à un objet grand. On cherche alors à calculer la valeur de g qui correspond à cette limite, notée g^* . Chercher le comportement à grand z revient à renormaliser le système. La valeur de g^* correspond au point fixe du groupe de renormalisation du brownien en interaction. Pour étudier le système en dimension critique 2, on effectuera également un développement en puissance de

$$\varepsilon = 1 - \frac{d}{2} = \frac{1}{2}(2 - d). \quad (2.19)$$

D'après les équations (2.15) et (2.18)

$$g = z \int_{\mathcal{D}} \frac{du}{2i\pi u^2} \frac{e^u}{1 + zf(u,d)}, \quad (2.20)$$

ce qui permet de calculer la limite lorsque z tend vers $+\infty$:

$$g \xrightarrow{z \rightarrow \infty} g^* = \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{d}{2})} \int_{\mathcal{D}} \frac{du}{2i\pi u^2} \frac{e^u}{u^{\frac{d}{2}-1}} = \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{d}{2}) \Gamma(1 + \frac{d}{2})}. \quad (2.21)$$

Comme on a pour $x \in [0, 1]$ l'égalité $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, on en déduit l'expression *universelle* :

$$g^* = \sin_c \frac{\pi d}{2} = \frac{\sin \pi (1 - \frac{d}{2})}{\frac{\pi d}{2}}. \quad (2.22)$$

Pour étudier plus en profondeur ce système, on effectue les mêmes calculs dans le cas particulier où le brownien part de l'origine. On note \mathcal{Z} sa fonction de partition, $\sum_{n \geq 0} (-z)^n \mathbb{J}_n$ son développement en série ($\mathbb{J}_0 = 1$). Sans détailler les calculs, en voici les résultats :

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_n &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n d\sigma_i \theta \left(1 - \sum_{i=1}^n \sigma_i \right) \prod_{i=1}^n \sigma_i^{-d/2} = \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})^n}{\Gamma(1 + n(1 - \frac{d}{2}))}; \\ \mathcal{Z} &= \int_{\mathcal{D}} \frac{du}{2i\pi u} \frac{e^u}{1 + zf(u,d)} = E_{1-\frac{d}{2}} \left(-z\Gamma \left(1 - \frac{d}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

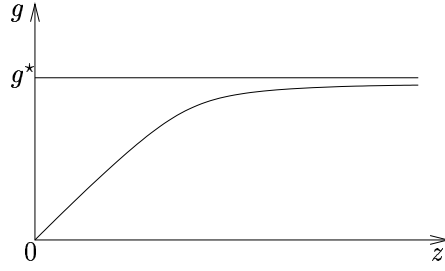


FIG. 2.4: Courbe de g en fonction de z . La pente à l'origine est 1. g tend vers la valeur g^* , calculée en (2.22).

E_α est une fonction de Mittag-Leffler, une généralisation de l'exponentielle définie par

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(1+n\alpha)}. \quad (2.23)$$

On remarque qu'un brownien partant d'un endroit quelconque et passant par l'origine, décrit par \mathcal{Z}_2^c , n'est rien d'autre que la réunion d'un brownien partant de l'origine et n'interagissant plus avec l'impureté, décrit par \mathcal{Z}_0 , et d'un brownien partant de l'origine en interaction avec l'impureté, décrit par \mathcal{Z} , d'où

$$\mathcal{Z}_2^c = -b \int_0^S \mathcal{Z}_0(S-s)\mathcal{Z}(s) ds = -b \int_0^S \mathcal{Z}(s) ds. \quad (2.24)$$

On peut voir cette égalité dans les formules, par exemple en dérivant (2.11) et en utilisant l'égalité $\Gamma(2+n\varepsilon) = (1+n\varepsilon)\Gamma(1+n\varepsilon)$. Donc on justifie *a posteriori* le nom de constante renormalisée pour g car

$$g = \frac{z}{S} \int_0^S \mathcal{Z}(s) ds. \quad (2.25)$$

2.2.2 Fonction de scaling

On peut calculer l'équivalent de \mathcal{Z} dans la limite des objets grands.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(s) &\underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{z} \int_{\mathcal{D}} \frac{du}{2i\pi u} \frac{e^u}{f(u,d)} = \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(1-\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2})}; \\ &\underset{z \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{(2\pi)^{d/2}}{b} \frac{\sin \pi(1-\frac{d}{2})}{\pi} S^{1-\frac{d}{2}}, \end{aligned}$$

dont on tire la valeur de l'exposant ζ , la *fonction de scaling*:

$$\mathcal{Z}(S) \sim S^{-\zeta} \quad (2.26)$$

avec

$$\boxed{\zeta = 1 - \frac{d}{2}} > 0. \quad (2.27)$$

2.2.3 Cas des dimensions $d \geq 2$

Pour les dimensions supérieures ou égales à 2, il faut introduire un cut-off, σ_0 , dans le calcul de $f(u, d)$. σ_0 correspond à la taille minimale d'une boucle :

$$f(u, d) = \int_{\sigma_0}^{\infty} \sigma^{-d/2} e^{-u\sigma} d\sigma. \quad (2.28)$$

Dans le cas de la dimension 2, $\sigma_0 = s_0/S$ tend vers 0. On peut alors développer (2.28) ce qui donne

$$f(u, d) \simeq E_i(-u\sigma_0) \simeq -\ln u\sigma_0 - \gamma + \mathcal{O}(u\sigma_0)$$

où E_i est la fonction exponentielle intégrale, et γ est la constante d'Euler-Mascheroni. On en déduit

$$g \longrightarrow g^* = \frac{1}{2 \ln \frac{s}{s_0}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln \frac{s}{s_0}}\right);$$

$$\mathcal{Z}(s) \longrightarrow \mathcal{Z}^*(s) = \frac{1}{z \ln \frac{s}{s_0}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^2 \frac{s}{s_0}}\right) \simeq \frac{2\pi}{b \ln \frac{s}{s_0}}.$$

2.2.4 Fonctions de Wilson

Le calcul exact de la constante de couplage renormalisée n'est pas toujours possible. Comment procède-t-on lorsque l'on veut calculer les asymptotes à partir des premiers termes du développement perturbatif? Dans les dimensions $d < 2$ on a un développement de Taylor en z et de Laurent en ε :

$$I_1 = \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2 + 1 - \frac{d}{2})} = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2 + \varepsilon)} \simeq \frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon)} \simeq \frac{1}{\varepsilon}(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots);$$

$$I_2 = \frac{\Gamma(\varepsilon)^2}{\Gamma(2 + 2\varepsilon)} \simeq \frac{2}{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon(1 + 2\varepsilon)} \simeq \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - 2\varepsilon + \dots);$$

...

établi ici grâce à l'équivalent de Γ en 0 : $\Gamma(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{\simeq} \varepsilon^{-1} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon)$. La principale recette du calcul à l'ordre n réside dans le fait que l'ensemble des coefficients ne dépend que des n premiers. On a également

$$J_1 = \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon), J_2 = \frac{1}{\varepsilon^2} + \mathcal{O}(1),$$

ce qui donne pour g et \mathcal{Z} :

$$\begin{aligned} g &= z - z^2 \frac{1}{\varepsilon} (1 - \varepsilon) + z^3 \frac{1}{\varepsilon^2} (1 - 2\varepsilon) + \mathcal{O}(z^4); \\ \mathcal{Z} &= 1 - z \frac{1}{\varepsilon} + z^2 \frac{1}{\varepsilon^2} + \mathcal{O}(z^3). \end{aligned}$$

On définit alors la fonction de Wilson de la façon suivante :

$$\boxed{W[z, \varepsilon] = \varepsilon z \left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{\varepsilon}} = \varepsilon \left(z - \frac{2z^2}{\varepsilon} (1 - \varepsilon) + \frac{3z^3}{\varepsilon^2} (1 - 2\varepsilon) \right). \quad (2.29)$$

On a alors le

Théorème 2.2.1 $W[g, \varepsilon]$ a un développement de Taylor en g et en ε .

Pour le voir sur notre exemple, il faut inverser le résultat (2.29) et l'exprimer en fonction de g et de ε .

$$\begin{aligned} z &= g + \frac{z^2}{\varepsilon} (1 - \varepsilon) + \frac{z^3}{\varepsilon^2} (1 - 2\varepsilon) + \mathcal{O}(z^4), \\ &= g + \left(g + \frac{z^2}{\varepsilon} \right)^2 \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} - g^3 \frac{1 - 2\varepsilon}{\varepsilon^2} + \mathcal{O}(z^4), \\ &= g + g^2 \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} + g^3 \frac{1 - 2\varepsilon}{\varepsilon^2} + \mathcal{O}(g^4); \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat

$$W[g, \varepsilon] = \varepsilon g - (1 - \varepsilon) g^2 + \mathcal{O}(\varepsilon) g^3 + \mathcal{O}(g^4). \quad (2.30)$$

Il nous faut maintenant trouver comment calculer g^* . Supposons que g^* existe, alors

$$\boxed{W[g^*, \varepsilon] = 0}, \quad (2.31)$$

ce qui donne, en utilisant l'expression (2.30), $g^* = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \varepsilon + \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$. Or la valeur (2.22) vaut $\frac{\sin \pi \varepsilon}{\pi(1 - \varepsilon)} = \varepsilon + \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$. De même pour la fonction de scaling ζ (équation 2.26), on a

$$\boxed{-\zeta(z, \varepsilon) = S \frac{\partial}{\partial S} \ln \mathcal{Z}(S)} = \varepsilon z \frac{\partial}{\partial z} \ln \mathcal{Z} = z + \frac{z^2}{\varepsilon} + \mathcal{O}(z^3 \varepsilon^{-2}). \quad (2.32)$$

On calcule alors, en inversant comme pour W , $\zeta(g, \varepsilon)$. On obtient, à comparer avec l'expression (2.27),

$$\zeta(g, \varepsilon) \longrightarrow \zeta(g^*, \varepsilon) = g^* - g^{*2} = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Chapitre 3

Évitement de deux browniens

Maintenant que l'on connaît le comportement d'un brownien en présence d'une impureté ponctuelle, on s'intéresse à ce qui se passe lorsque deux browniens sont en présence l'un de l'autre. Ce problème fut initialement traité par Fischer en 1984[1]. On cherche à calculer la probabilité que deux browniens partants du même point ne se rencontrent nulle part ailleurs,

$$P(S) \stackrel{\text{def}}{=} P(B_1(0,S) \cap B_2(0,S) = \emptyset). \quad (3.1)$$

D'après les arguments de la section 1.3, on a en dimension $d > 4$, $P(S) = 1$ et lorsque $d < 4$, $P(S) \rightarrow 0$ lorsque S tend vers l'infini. Cette décroissance est une loi de puissance, caractérisée par la fonction de scaling, vu dans le paragraphe 2.2.2. Pour $d = 4$, on a le cas limite

$$P(S) \sim (\ln S)^{-\bar{\zeta}}. \quad (3.2)$$

3.1 Modèle d'Edwards

Pour effectuer les calculs de ζ , $\bar{\zeta}$, on utilise le modèle d'Edwards pour deux browniens partant du même point et interagissant lorsqu'il se rencontre en un point :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \int \mathcal{D}\mathbf{r}_1 \mathcal{D}\mathbf{r}_2 \delta^d(\mathbf{r}_1(0)) \delta^d(\mathbf{r}_2(0)) e^{-\frac{1}{2} \int_0^S \dot{\mathbf{r}}_1^2(s_1) ds_1} e^{-\frac{1}{2} \int_0^S \dot{\mathbf{r}}_2^2(s_2) ds_2} \\ & \times e^{-b \int_0^S ds_1 \int_0^S ds_2 \delta^d(\mathbf{r}_1(s_1) - \mathbf{r}_2(s_2))}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.1.1 Calcul perturbatif

On calcule alors perturbativement en b la fonction (3.3). On normalise pour que si $b = 0$ alors $\mathcal{Z} = 1$ et on note $\langle f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle_0$ la moyenne statistique de f correspondant à \mathcal{Z} . Le terme d'ordre 1 en b s'écrit alors

$$\left\langle -b \int_0^S ds_1 \int_0^S ds_2 \delta^d(\mathbf{r}_1(s_1) - \mathbf{r}_2(s_2)) \right\rangle_0, \quad (3.4)$$

ce qui revient à calculer la probabilité de faire une boucle de longueur $s_1 + s_2$ passant par l'origine. La probabilité de revenir au point de départ étant donnée par (1.15) on en déduit que le premier terme est $(2\pi(s_1 + s_2))^{-d/2}$, dont on tire l'expression de \mathcal{Z} à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= 1 - b \int_0^S ds_1 \int_0^S ds_2 (2\pi(s_1 + s_2))^{-d/2} + \mathcal{O}(b^2), \\ &= 1 - (2\pi)^{-\frac{d}{2}} b S^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx \int_0^1 dx' (x + x')^{-d/2}, \\ &= 1 - z \frac{2^{2-\frac{d}{2}} - 2}{(1 - \frac{d}{2})(2 - \frac{d}{2})} + \mathcal{O}(z^2) \end{aligned}$$

en posant

$$z = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} b S^{2-\frac{d}{2}}, \quad (3.5)$$

variable sans dimension, dont la limite vers $+\infty$ nous intéresse, que l'on appellera constante de couplage nue.

3.1.2 Approche diagrammatique

Écrivons maintenant l'expression du terme de deuxième ordre en b :

$$\mathcal{Z}_2^{c[2]} = \left\langle \frac{(-b)^2}{2} \int_0^S ds_1 \int_0^S ds'_1 \int_0^S ds_2 \int_0^S ds'_2 \delta^d(\mathbf{r}_1(s_1) - \mathbf{r}_2(s_2)) \delta^d(\mathbf{r}_1(s'_1) - \mathbf{r}_2(s'_2)) \right\rangle_0 \quad (3.6)$$

que l'on représente par le diagramme de la figure 3.1.

Il y a quatre types de diagrammes, dont deux sont représentés sur la figure,

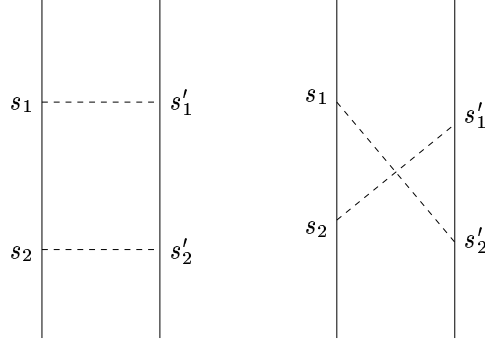


FIG. 3.1: Diagramme d'ordre deux pour la fonction de partition Z_2^c . Les pointillés signifient qu'il y a contact. Comme le système est brownien, on a en réalité quatre fois le même diagramme.

mais tous ces termes sont égaux, ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
Z_2^{c[2]} &= 4 \times \frac{(-b)^2}{2} \int_0^S ds_1 \int_{s_1}^S ds'_1 \int_0^S ds_2 \int_{s_2}^S ds'_2 \\
&\quad \langle \delta^d(\mathbf{r}_1(s_1) - \mathbf{r}_2(s_2)) \delta^d(\mathbf{r}_1(s'_1) - \mathbf{r}_2(s'_2)) \rangle_0; \\
&= 2b^2 \int_0^S ds_1 \int_{s_1}^S ds'_1 \int_0^S ds_2 \int_{s_2}^S ds'_2 (2\pi)^{-d/2} (s'_1 - s_1 + s'_2 - s_2)^{-d/2}; \\
&= 2b^2 (2\pi)^{-d/2} \int_0^S ds \int_0^S ds' (s' + s)^{-d/2} (S - s)(S - s'); \\
&= 2b^2 (2\pi)^{-\frac{d}{2}} S^{4-\frac{d}{2}} I_d,
\end{aligned}$$

avec

$$I_d = \int_0^1 \int_0^1 dx dx' \frac{(1-x)(1-x')}{(x+x')^{d/2}} = \frac{1}{(1-\frac{d}{2})(2-\frac{d}{2})(3-\frac{d}{2})} \left(\frac{2^{4-\frac{d}{2}} - 2}{4 - \frac{d}{2}} - 2 \right).$$

On pose alors, de la même façon qu'en (2.18) et (2.19),

$$g = -\frac{Z_2^c}{(2\pi S)^{d/2}} = z - 2I_d z^2 + \mathcal{O}(z^3), \quad (3.7)$$

$$\varepsilon = 4 - d. \quad (3.8)$$

3.2 Renormalisation du problème

3.2.1 Calcul de la fonction de Wilson

On développe alors I_d dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ pour obtenir le développement de Taylor en z et de Laurent en ε , analogue au développement vu dans la section 2.2.4.

$$I_d = \frac{1}{(-1) \times \frac{\varepsilon}{2} \times 1 \times 2} \left(\frac{2}{2} - 2 \right) + o(1) = \frac{2}{\varepsilon} + o(1),$$

$$g = z - \left(\frac{4}{\varepsilon} + o(1) \right) z^2 + \mathcal{O}(z^3), \quad (3.9)$$

$$\mathcal{Z} = 1 - \left(\frac{2}{\varepsilon} + o(1) \right) z + \mathcal{O}(z^2). \quad (3.10)$$

On va maintenant calculer la fonction de Wilson en g et en ε pour trouver la valeur de la constante de couplage renormalisée lorsque z tend vers l'infini, notée g^* , et la fonction de scaling ζ . L'opérateur $S \frac{\partial}{\partial S}$ vaut, en utilisant (3.5), $\frac{\varepsilon}{2} z \frac{\partial}{\partial z}$, d'où

$$W(z, \varepsilon) = S \frac{\partial}{\partial S} g = \frac{\varepsilon}{2} z \frac{\partial}{\partial z} \left(z - \frac{4}{\varepsilon} z^2 \right) = \frac{\varepsilon}{2} \left(z - \frac{8}{\varepsilon} z^2 \right) + \mathcal{O}(z^3), \quad (3.11)$$

$$\zeta(z, \varepsilon) = -S \frac{\partial}{\partial S} \ln \mathcal{Z} = -\frac{\varepsilon}{2} z \frac{\partial}{\partial z} \left(-z \frac{2}{\varepsilon} \right) = z + \mathcal{O}(z^2). \quad (3.12)$$

Reste maintenant à en déduire $W[g, \varepsilon]$ et $\zeta[g, \varepsilon]$ en inversant l'égalité (3.9) :

$$z = g + \frac{4}{\varepsilon} z^2 + \mathcal{O}(z^3) = g + \frac{4}{\varepsilon} g^2 + \mathcal{O}(g^3), \quad (3.13)$$

ce qui donne le développement de Taylor en g et en ε

$$W[g, \varepsilon] = \frac{\varepsilon}{2} g - 2g^2 + \mathcal{O}(g^3), \quad (3.14)$$

$$\zeta[g, \varepsilon] = g + \mathcal{O}(g^2). \quad (3.15)$$

3.2.2 Limite des objets grands

Lorsque z tend vers l'infini, g tend vers g^* , ce qui se traduit par $W[g^*, \varepsilon] = 0$, on en tire

$$\boxed{g^* = \frac{\varepsilon}{4}}. \quad (3.16)$$

La fonction de scaling ζ dans la limite des objets grands tend vers g^* . Signalons que lorsque $d = 2$ il existe une façon de calculer ζ exactement dont le résultat est $\zeta(d = 2) = 5/8$.

3.2.3 Le cas de la dimension 4

Voyons ce qui se passe dans le cas limite $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire en dimension 4. On a $W[g, \varepsilon] = -2g^2$, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} -2g^2 &= S \frac{\partial g}{\partial S} + \mathcal{O}(g^3), \\ 2 \frac{dS}{S} &= -\frac{dg}{g^2} \\ g &= \frac{1}{2 \ln \frac{S}{s_0}}, \end{aligned}$$

où s_0 est un cut-off qui correspond à la longueur minimale séparant deux contacts le long d'un browniens. De plus pour la fonction de scaling, on obtient

$$\begin{aligned} S \frac{\partial S}{\partial \ln \mathcal{Z}} &= g = -\frac{1}{2 \ln \frac{S}{s_0}}, \\ \frac{d\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}} &= -\frac{1}{2} \frac{ds}{s \ln \frac{s}{s_0}}, \\ \mathcal{Z} &\sim \left(\ln \frac{S}{s_0} \right)^{-1/2}, \end{aligned}$$

la valeur de $\bar{\zeta}$, défini en (3.2), est donc $1/2$.

On donne ici les résultats de ce modèle à l'ordre suivant :

$$\begin{aligned} W[g, \varepsilon] &= \frac{\varepsilon}{2}g + \left(-2 + \varepsilon(2 \ln 2 - \frac{1}{2}) \right) g^2 + 4g^3 + \mathcal{O}(g^4), \\ \zeta[g, \varepsilon] &= \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \ln 2) \right) + (2 + \ln 2)g^2 + \mathcal{O}(g^3), \\ g^* &= \frac{\varepsilon}{4} + (1 + 4 \ln 2) \left(\frac{\varepsilon}{4} \right)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ \zeta[g^*, \varepsilon] &= \frac{\varepsilon}{4} + \left(\frac{\varepsilon}{4} \right)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

Le développement de $\zeta[g^*]$ *semble* être à coefficients dans \mathbf{Q} , ce qui paraît indiquer que nos calculs sont plus compliqués qu'ils ne devraient. De même les coefficients de g^* ont l'air d'être des éléments de $\mathbf{Q}[\ln 2]$. Le principe de la renormalisation apparaît encore assez mal compris par les théoriciens à l'heure actuelle.

3.3 Compléments sur les développements

On sait aujourd'hui que les équations du groupe de renormalisation au premier ordre permettent de resommer toute la série de perturbation. Voyons cela dans le cas où $z \sim S^\varepsilon$ et les équations de g et de \mathcal{Z} sont données par

$$g = z - \frac{a}{\varepsilon} z^2 + \dots \quad (3.17a)$$

$$\mathcal{Z}(s) = 1 + \frac{b}{\varepsilon} z + \dots \quad (3.17b)$$

L'expression (3.17) inversée donne pour z la formule $z = g + \frac{a}{\varepsilon}g^2$. On a dans ce cas la fonction de Wilson

$$W[g, \varepsilon] = \varepsilon g - ag^2 = \varepsilon z \frac{\partial g}{\partial z},$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\frac{dz}{z} = dg \left(\frac{1}{g} + \frac{a/\varepsilon}{1 - \frac{a}{\varepsilon}g} \right).$$

On peut alors intégrer cette expression. Comme $g = z + \mathcal{O}(z^2)$ la constante d'intégration est nulle et on obtient

$$\boxed{g = \frac{z}{1 + \frac{a}{\varepsilon}z}}, \quad (3.18)$$

que l'on écrit sous forme d'une somme correspondant au développement perturbatif à tous les ordres

$$g = z \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{a}{\varepsilon} \right)^n z^n.$$

De la même façon pour le calcul de \mathcal{Z} .

$$\begin{aligned} \varepsilon z \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial z} &= bg + \dots \\ d \ln \mathcal{Z} &= \frac{dz}{z} \frac{b}{\varepsilon} g = \frac{b}{\varepsilon} \frac{dz}{1 + \frac{a}{\varepsilon}z}, \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{Z} = \left(1 + \frac{a}{\varepsilon}z \right)^{b/a}}, \quad (3.19)$$

soit (avec $\alpha = b/a$) la somme

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\varepsilon}z \right)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Les résultats d'un tel modèle sont les suivants

$$g^* = \frac{\varepsilon}{a} + \mathcal{O}(\varepsilon^2); \quad (3.20)$$

$$\zeta[g^*, \varepsilon] = -\frac{\varepsilon b}{2a}, \quad \mathcal{Z}(S) \sim S^{-\zeta}; \quad (3.20')$$

$$\mathcal{Z}(S) = 1 + \sum_n b_n(d) z^n, \quad b_n(d) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{n,p} \varepsilon^{p-n-1} \quad (3.20'')$$

Pour obtenir l'ensemble des coefficients du développement à l'ordre q , il suffit de connaître les coefficients $a_{1,1} \dots a_{q,q}$ soit q^2 coefficients. Ceux-ci permettent, par des méthodes similaires à celles présentées ici dans le cas $q = 1$, de calculer les termes suivants du développement à l'ordre q , les $a_{n,p}$ avec $p \in \{1, \dots, q\}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Chapitre 4

Polymères autoévitants

4.1 L'analogie polymères–théorie des champs

On a dit dans notre introduction, page 5, que la théorie des polymères et la théorie des champs sont analogues. Voyons alors, avant d'attaquer le problème de l'autoévitement, comment se fait cette analogie.

On se donne un champ vectoriel φ à n composantes, c'est à dire que

$$\varphi(\mathbf{r}) = (\varphi_1(\mathbf{r}), \varphi_2(\mathbf{r}), \dots, \varphi_n(\mathbf{r})),$$

on appelle un tel modèle $O(n)$. On note

$$(\nabla_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r}))^2 = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \right)^2$$

et on se donne l'action lagrangienne

$$S[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^d\mathbf{r} \left[(\nabla_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r}))^2 + m^2\varphi^2(\mathbf{r}) + b(\varphi^2(\mathbf{r}))^2 \right]. \quad (4.1)$$

La fonction de corrélation du champ φ est

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \varphi_1(\mathbf{r}_1)\varphi_1(\mathbf{r}_2) \rangle \quad (4.2)$$

que l'on représente par le diagramme de Feynman de la figure 4.1.

En transformée de Fourier ce terme s'exprime, avec $\xi \in \mathbf{R}^d$

$$\hat{G}(\xi) = \frac{1}{m^2 + \xi^2}$$

à l'ordre 0 en b , qui est donc en réalité le propagateur d'une théorie de champ libre. (L'interaction $b(\varphi^2(\mathbf{r}))^2$ est considérée comme un terme perturbatif.) Le

$$\mathbf{r}_1 \underset{1}{\times} \text{-----} \underset{1}{\times} \mathbf{r}_2$$

FIG. 4.1: On représente le propagateur de Feynman entre \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 comme un segment reliant \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 , ce qui signifie que l'on intègre la fonction $\varphi_1(\mathbf{r}_1) \times \varphi_1(\mathbf{r}_2)$ fonctionnellement avec le poids de Gibbs $\exp(-iS[\varphi]/\hbar)$. Les indices 1 sont ici pour expliciter quelle composante du champ est intégrée.

$$\times \text{---} \bigcirc \text{---} \times = \underset{1}{\times} \text{---} \underset{1}{\times} + \underset{1}{\times} \text{---} \bigcirc \text{---} \underset{1}{\times} \times 2$$

FIG. 4.2: Le terme à une boucle de la théorie de champ dite « φ^4 » est somme de $n + 2$ termes dont n sont non connexes et 2 sont connexes. Lorsque n tend vers 0, il ne reste que les termes connexes qui sont similaires à des polymères auto-évitants.

premier terme d'une telle théorie est représenté en diagramme de Feynman sur la figure 4.2.

Des Cloizeaux a introduit dans l'action lagrangienne (4.1) un terme

$$\int H\varphi_1(\mathbf{r})$$

qui permet de calculer la variation de pression osmotique dans une solution contenant des polymères.

4.2 Théorie des polymères

4.2.1 Remarques générales

La théorie des polymères se base sur l'action suivante

$$S[\mathbf{r}(s)] = \frac{1}{2} \int_0^S \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)^2 ds + \frac{1}{2} \iint^S \delta^d(\mathbf{r}(s') - \mathbf{r}(s)) ds ds', \quad (4.3)$$

qui n'est autre que le modèle d'Edwards pour un brownien en interaction avec lui-même. À la différence des chapitres précédents, on obtient une théorie de champ *non locale* et singulière. On va ici procéder comme en théorie de champs habituelle en introduisant un vecteur impulsion \mathbf{k} dans l'expression de la fonction de partition $\mathcal{Z}(S)$. On pose

$$\mathcal{Z}(\mathbf{k}, S) = \int \mathcal{D}\mathbf{r}(s) e^{-\frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{r}}^2 ds - \frac{1}{2} \iint \delta^d(\mathbf{r}(s') - \mathbf{r}(s)) ds ds'} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}(S) - \mathbf{r}(0))} \delta^d(\mathbf{r}(0)); \quad (4.4)$$

on définit $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}|_{b=0}$ et le propagateur

$$G(\mathbf{k}, S) = \frac{\mathcal{Z}(\mathbf{k}, S)}{\mathcal{Z}_0(\mathbf{0}, S)}, \quad (4.5)$$

ce qui revient à normaliser \mathcal{Z}_0 à 1 pour $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. En l'absence d'interaction, \mathcal{Z}_0 est la fonction de partition d'un brownien libre $\mathcal{Z}_0(\mathbf{k})$ est donc

$$\mathcal{Z}_0(\mathbf{k}, S) = \int d^d \mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} p_0(\mathbf{r}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}^2 S}. \quad (4.6)$$

On a alors une identité faisant le lien avec la théorie des champs

$$\int_0^\infty \mathcal{Z}_0(\mathbf{k}, S) e^{-\frac{m^2}{2}S} dS = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (4.7)$$

4.2.2 Calcul au premier ordre en b

Le diagramme de gauche de la figure 4.3 représente la théorie libre, c'est-à-dire le brownien, alors que celui de droite représente un polymère interagissant une fois avec lui-même, terme à une boucle. La transformée de Fourier du hamiltonien du système vaut pour le diagramme de gauche $\exp(-\frac{\mathbf{k}^2 S}{2})$, celui du terme de droite vaut $\exp(-\frac{\mathbf{k}^2 (S - |s' - s|)}{2})$. Ainsi à l'ordre d'une boucle (ordre 1) la fonction

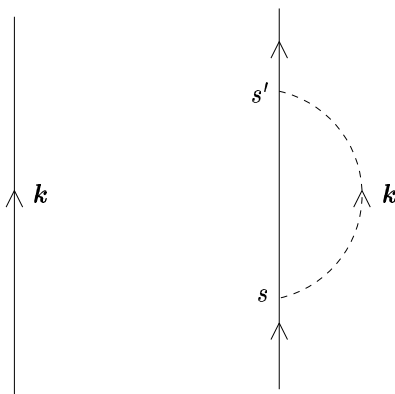


FIG. 4.3: Diagrammes d'ordre zéro et d'ordre un de la fonction de partition $\mathcal{Z}(\mathbf{k}, S)$. Les pointillés signifient qu'il y a contact. Entre s et s' le vecteur \mathbf{k} du diagramme de droite passe par les pointillés (la boucle est « court-circuitée »).

de partition vaut alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1(\mathbf{k}, S) &= \int \mathcal{D}\mathbf{r}(s) e^{-\mathcal{H}(\mathbf{r})} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0))} \delta^d(\mathbf{r}(0)), \\
&= -\frac{b}{2} \iint_0^S ds ds' \frac{\exp\left(-\frac{\mathbf{k}^2}{2}(S - |s' - s|)\right)}{(2\pi|s' - s|)^{d/2}}, \\
&= -b \int_0^S ds \int_s^S ds' \frac{\exp\left(-\frac{\mathbf{k}^2}{2}(S - s' + s)\right)}{(2\pi(s' - s))^{d/2}}, \\
&= -b e^{-\frac{\mathbf{k}^2 S}{2}} \int_0^S (S - s'') ds'' \frac{\exp(-\frac{\mathbf{k}^2}{2}s'')}{(2\pi s'')^{d/2}}, \\
\mathcal{Z}(\mathbf{k}, S) &= e^{-\frac{\mathbf{k}^2 S}{2}} \left(1 - \underbrace{(2\pi)^{-d/2} S^{2-\frac{d}{2}} b}_{z} \int_0^1 (1-x) x^{-d/2} e^{\frac{\mathbf{k}^2 S}{2} x} dx + \mathcal{O}(z^2) \right).
\end{aligned}$$

Seuls deux paramètres interviennent dans cette formulation, z et $\mathbf{k}^2 S$.

4.2.3 Régularisation dimensionnelle

Lorsque $d > 2$ l'intégrale $\int (1-x) x^{-d/2} \exp(-\mathbf{k}^2 S x/2) dx$ est divergente. Pour régulariser \mathcal{Z} , il nous faut introduire un cut-off $x_0 = s_0/S$, s_0 est la longueur séparant deux points sur la chaîne la plus petite telle que les deux points peuvent interagir. Si on calcule par exemple $\mathcal{Z}(\mathbf{k} = \mathbf{0}, S)$ on obtient

$$\mathcal{Z}(\mathbf{0}, S) = 1 - z \left(\left[\frac{x^{1-\frac{d}{2}}}{1-\frac{d}{2}} \right]_{x_0}^1 - \left[\frac{x^{2-\frac{d}{2}}}{2-\frac{d}{2}} \right]_{x_0}^1 \right) = 1 + z \left(\frac{x_0^{1-\frac{d}{2}} - 1}{1-\frac{d}{2}} - \frac{x_0^{2-\frac{d}{2}}}{2-\frac{d}{2}} \right).$$

Pour $2 < d \leq 4$ seul le terme $x_0^{1-\frac{d}{2}}$ est divergent. La physique à une boucle pour des dimensions proche de 4, développement en $\varepsilon = d - 4$, est donnée par le second terme. Dans ce cas, on peut réécrire

$$z x_0^{1-\frac{d}{2}} = (2\pi)^{-d/2} b S^{2-\frac{d}{2}} \left(\frac{s_0}{S} \right)^{1-\frac{d}{2}} = \frac{S}{s_0} \underbrace{(2\pi)^{-d/2} b s_0^{2-\frac{d}{2}}}_{\xrightarrow{s_0 \rightarrow 0} 0},$$

expression dans laquelle seul S/s_0 tend vers l'infini, mais est proportionnel au nombre de mailles. Si l'on ne prend en compte que les termes restant finis lorsque x_0 tend vers 0, on a alors

$$\mathcal{Z} = 1 + z \left(\frac{1}{2-\frac{d}{2}} - \frac{1}{1-\frac{d}{2}} \right) + \text{termes divergents.} \quad (4.8)$$

Dans l'expression de l'énergie libre, définie par $\mathcal{F} = -\ln \mathcal{Z}$, on doit avoir un terme extensif, proportionnel au nombre de mailles du polymère, donc divergent lorsque x_0 tend vers 0 comme $1/x_0$. \mathcal{F} a d'autres termes qui tendent vers une limite finie lorsque x_0 tend vers 0. On appelle la somme de ces termes la *partie régulière* de \mathcal{F} .

$$\mathcal{F} = -\ln \mathcal{Z} \left(z, x_0, \frac{S}{s_0} \right) = \underbrace{A(z, S) \frac{S}{s_0}}_{\text{extensif}} + \mathcal{F}_{\text{rég}}(z, S, s_0),$$

ce qui donne pour \mathcal{Z}

$$\mathcal{Z} = \exp \left(-A(z, S) \frac{S}{s_0} \right) \underbrace{\exp(-\mathcal{F}_{\text{rég}})}_{\mathcal{Z}_{\text{rég}}}. \quad (4.9)$$

En dimension $d < 2$ on a bien sûr $\mathcal{Z} \xrightarrow{s_0 \rightarrow 0} \mathcal{Z}_{\text{rég}}$ puisque la théorie est régulière dans ces dimensions. Or on constate que $\mathcal{Z}_{\text{rég}}$ a la même expression dans les dimensions $d < 2$ que dans les dimensions $d > 2$ et qu'elle est *analytique* ce qui signifie que la connaître sur $]0; 2[$ suffit pour la connaître sur \mathbf{R} . On appelle cela faire le prolongement analytique de la fonction $\mathcal{Z}_{\text{rég}}$. Ce prolongement est unique. On peut alors calculer $\mathcal{Z}_{\text{rég}}$ sans se soucier des cut-off éventuels. Cette technique s'appelle la *régularisation dimensionnelle*¹. On travaillera désormais seulement avec la partie régulière. Écrivons alors l'expression de la fonction de corrélation régulière pour $d < 4$:

$$G(\mathbf{q}^2 S, z) = \frac{\mathcal{Z}(\mathbf{q}^2 S, z)}{\mathcal{Z}(0, z)} = e^{-\frac{1}{2} \mathbf{q}^2 S} \left(1 - z \int_0^1 \left(e^{\frac{1}{2} \mathbf{q}^2 S x} - 1 \right) \frac{1-x}{x^{d/2}} dx + \mathcal{O}(z^2) \right).$$

permet alors de calculer le rayon de giration du polymère. À l'ordre zéro celui vaut dS comme pour le brownien, son expression à l'ordre un est donnée par

$$\begin{aligned} R^2 &= \left\langle (\mathbf{r}(S) - \mathbf{r}(0))^2 \right\rangle_0 = -2d \frac{\partial}{\partial (\mathbf{q}^2)} G(\mathbf{q}^2 S, z) \\ &= 2dS \left(1 - z \int_0^1 (1-x-1)(1-x)x^{-d/2} dx + \mathcal{O}(z^2) \right); \\ &= 2dS \left(1 + \frac{z}{\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(3 - \frac{d}{2}\right)} + \mathcal{O}(z^2) \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Voyons alors comment la régularisation dimensionnelle se traduit dans l'expression de G . On remarque en effet que l'expression (4.10) est régulière en $d = 4$

1. On notera ici qu'en théorie des champs on régularise

$$\mathcal{Z} = \int \exp(-m^2 S) \exp\left(-A \frac{S}{s_0}\right) \mathcal{Z}_{\text{rég}} dS$$

en posant $m_{\text{eff}}^2 = m^2 + \frac{A}{s_0}$, ce qui rend l'intégrale régulière.

alors que celle de \mathcal{Z} ne l'est pas *a priori*. Mais si l'on remplace S par l'expression R^2/d de l'expression (4.10) on peut réécrire G sous la forme

$$\begin{aligned} G &= e^{-\frac{q^2 R^2}{2d} \left(1 - \frac{4z}{(4-d)(6-d)}\right)} \left(1 - z \int_0^1 \left(e^{\frac{q^2 R^2 x}{2d}} - 1\right) (1-x)x^{-d/2} dx + \mathcal{O}(z^2)\right) \\ &= e^{-\frac{q^2 R^2}{2d}} \left(1 - z \int_0^1 \left(e^{\frac{q^2 R^2 x}{2d}} - 1 - \frac{q^2 R^2}{2d} x\right) (1-x)x^{-d/2} dx + \mathcal{O}(z^2)\right). \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit que l'expression de G est régulière pour $d < 4$.

4.3 Renormalisation

Pour calculer la constante de couplage renormalisée g il faut considérer la fonction de partition de deux polymères autoévitants. Elle a pour expression, en notant $\mathcal{W}[\mathbf{r}]$ la mesure de Wiener définie par (1.21),

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2(S,S) &= \int \mathcal{D}\mathbf{r}_1 \mathcal{D}\mathbf{r}_2 \mathcal{W}[\mathbf{r}_1] \mathcal{W}[\mathbf{r}_2] \exp\left(-\frac{b}{2} \iint \delta^d(\mathbf{r}_1(s_1) - \mathbf{r}_1(s'_1)) ds_1 ds'_1\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{b}{2} \iint \delta^d(\mathbf{r}_2(s_2) - \mathbf{r}_2(s'_2)) ds_2 ds'_2\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{b}{2} \iint \delta^d(\mathbf{r}_1(s_1) - \mathbf{r}_2(s_2)) ds_1 ds_2\right) \\ &= \mathcal{Z}(S)^2 \mathcal{V}^2 + \mathcal{Z}_2^c(S,S) \mathcal{V} \end{aligned} \quad (4.11)$$

où \mathcal{V} est le terme de volume dans lequel évoluent les polymères. Un tel terme de volume a déjà été rencontré dans le cas du brownien en interaction avec une impureté (voir page 10), on le retirait pour pouvoir définir la fonction de partition connexe \mathcal{Z}_2^c .

4.3.1 Pression osmotique

L'expression (4.11) nous permet de calculer à l'ordre deux la fonction de partition grand-canonique. En notant $f = e^{\beta\mu} = e^\alpha$ la fugacité, on obtient l'expression

$$\mathcal{Z}_G(f) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{f^N}{N!} \mathcal{Z}_N(S, \dots, S) = 1 + f \mathcal{Z}_1 + \frac{f^2}{2} \mathcal{Z}_2 + \dots \quad (4.12)$$

Soit alors Π la pression osmotique. La fonction grand potentiel $\ln \mathcal{Z}_G$ équivaut à $\beta \Pi \mathcal{V}$ dans la limite thermodynamique $\mathcal{V} \rightarrow \infty$. Le nombre moyen de polymères vaut

$$\langle N \rangle = f \frac{\frac{\partial}{\partial f} \ln \mathcal{Z}_G}{\mathcal{Z}_G(f)} = f \frac{\partial}{\partial f} \mathcal{Z}_G,$$

ce qui donne immédiatement pour la concentration

$$\mathfrak{c} = \frac{\langle N \rangle}{\mathcal{V}} = \frac{f}{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial f} \ln \mathcal{Z}_G. \quad (4.13)$$

Calculons alors à l'ordre deux en f la fonction $\ln \mathcal{Z}_G$

$$\ln \mathcal{Z}_G = \ln \left(1 + f \mathcal{Z}_1 + \frac{f^2}{2} \mathcal{Z}_2 + \dots \right) = f \mathcal{Z}_1 + \frac{f^2}{2} (-\mathcal{Z}_1^2 + \mathcal{Z}_2)$$

on obtient ainsi les expressions pour la pression et la concentration

$$\begin{aligned} \mathfrak{c} &= \frac{f \mathcal{Z}_1}{\mathcal{V}} + \frac{f^2}{2\mathcal{V}} (\mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_1^2) \\ \beta\Pi &= \mathfrak{c} - \frac{f^2}{\mathcal{V}} (\mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_1^2) = \boxed{\mathfrak{c} - \frac{\mathfrak{c}^2}{2} \frac{\mathcal{Z}_2^c}{\mathcal{Z}_1^2}}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

grâce à l'égalité (4.11). On constate qu'à l'ordre un, on a simplement $\beta\Pi = \mathfrak{c}$ ce qui est l'équation des gaz parfaits.

En remarquant que $\mathfrak{c} \sim R^{-d}$ on pose

$$g = - \left(\frac{d}{2\pi R^2} \right)^{d/2} \frac{\mathcal{Z}_2^c}{\mathcal{Z}_1^2} \quad (4.15)$$

g est ainsi le deuxième coefficient adimensionné du viriel et l'on peut écrire (4.14) sous la forme $\beta\Pi = \mathfrak{c} \left(1 + \frac{1}{2} g \left(\frac{2\pi}{d} \right)^{d/2} \mathfrak{c} (R^2)^{d/2} \right)$, on a ainsi une fonction d'échelle

$$\beta\Pi = \mathfrak{c} \mathcal{F}_d \left(\mathfrak{c} (R^2)^{d/2}, g \right)$$

dans laquelle g tend vers une valeur $g^*(d)$ lorsque l'on prend la limite des grands objets $S \rightarrow \infty$.

4.3.2 Calcul de \mathcal{Z}_2^c

On se propose de calculer \mathcal{Z}_2^c par méthode diagrammatique à l'ordre deux. Il y a trois sortes de terme.

1. Le seul terme d'ordre un provient du diagramme de la figure 4.4 et vaut par conséquent $-bS^2$: le poids d'une interaction est b , et le point d'interaction est susceptible de se déplacer selon chaque polymère de S .
2. Les termes d'ordre deux sont de deux sortes. Tout d'abord intéressons-nous aux termes dans lesquels les deux polymères interagissent deux fois. Ces termes sont une particule-irréductibles (ou plutôt un polymère irréductibles) et ont déjà été rencontrés au chapitre 3, correspondant aux interactions entre les deux browniens. Ce sont les mêmes que dans l'équation (3.6) dont le diagramme est représenté sur la figure 4.5. Ces diagrammes

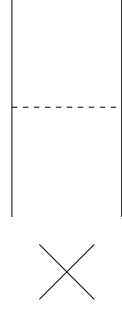


FIG. 4.4: Terme d'ordre un de Z_2^c en b . Le petit diagramme rappelle l'équivalent en théorie des champs habituelle.

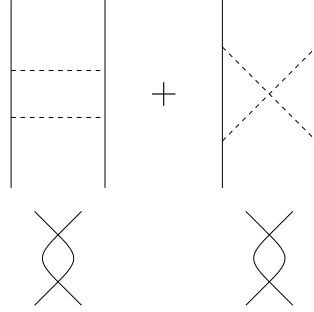


FIG. 4.5: Termes de Z_2^c d'ordre deux en b dans lesquels les polymères interagissent deux fois. Ce sont les mêmes diagrammes que ceux de la figure 3.1. Les petits diagrammes rappellent ceux de la théorie des champs usuelles.

représentent en fait la même chose puisque le changement de paramétrisation $s_2 \leftrightarrow S - s_2$ les échange. La contribution de ces diagrammes vaut donc, en appelant s_1 et s_2 les longueurs sur chaque polymères entre deux contacts ainsi la boucle a-t-elle pour longueur $s_1 + s_2$ et le poids statistique de la longueur sera donc $[2\pi(s_1 + s_2)]^{-d/2}$,

$$\begin{aligned} & (-b)^2 \int_0^S ds_1 \int_0^S ds_2 [2\pi(s_1 + s_2)]^{-d/2} (S - s_1)(S - s_2) \\ & = (2\pi)^{-d/2} b^2 S^{4-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{(1-x_1)(1-x_2)}{(x_1+x_2)^{d/2}}; \end{aligned} \quad (4.16)$$

un pôle apparaît en $d = 4^2$. On notera dans la suite l'expression de (4.16) $-bS^2\mathcal{I}(d)$. Comme on doit tenir compte de l'invariance par l'échange des

2. Ce pôle n'est pas très gênant puisque l'on peut supprimer le cut-off en se plaçant à $d < 2$ puis déduire la partie régulière, donc physique, de Z_2^c par prolongement analytique.

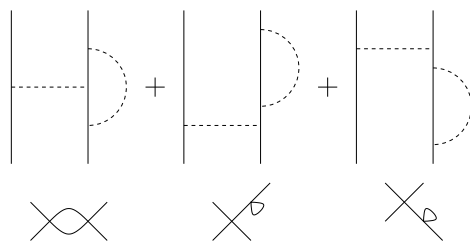


FIG. 4.6: Termes de Z_2^c d'ordre deux en b dans lesquels un polymère auto-interagit. Les petits diagrammes rappellent ceux de la théorie des champs usuelles.

deux polymères, on prendra garde au fait que ce terme contribue deux fois dans Z_2^c .

3. Les autres termes sont les termes dont les diagrammes joignent un polymère avec lui-même. Ce sont eux qui décrivent les interactions d'un polymère avec lui-même. Ils sont représentés par les diagrammes de la figure 4.6. La contribution de ces diagrammes se fait de la même façon déjà détaillée pour les deux autres différentes sortes de termes. On remarque que si l'on autorise deux vertex à se croiser, on a une intégrale dans laquelle les points de contact parcourent le polymère en entier. Cette remarque permet de calculer directement la somme des termes et conduit à

$$(-b)^2 S^2 \int_0^S ds_2 (S - s_2) (2\pi s_2)^{-d/2} = (2\pi)^{-d/2} b^2 S^{3-d/2} \int_0^1 dx \frac{1-x}{x^{d/2}} \quad (4.17)$$

que l'on notera désormais $-bS^2 I_0$. (On peut suspecter que comme en théorie des champs seuls le premier terme, une particule irréductible contribuera à l'expression de g .)

4.3.3 Théorie effective des polymères

On a d'après la section précédente l'expression de Z_2^c et celle de Z :

$$\begin{aligned} Z &= 1 + I_0 ; \\ Z_2^c &= -bS^2 (1 + 2I_0 + 2I(d)). \end{aligned}$$

Ainsi on peut calculer

$$\begin{aligned} \frac{Z_2^c}{Z^2} &= -bS^2 \frac{1 + 2I_0 + 2I(d)}{1 + 2I_0 + \dots} \\ &= -bS^2 (1 - zI'(d)) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'(d) &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{(1-x_1)(1-x_2)}{(x_1+x_2)^{d/2}} \\ &= \frac{1}{1-\frac{d}{2}} \frac{1}{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{3-\frac{d}{2}} \left(\frac{2^{4-\frac{d}{2}}-2}{4-\frac{d}{2}} - 2 \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Comme on s'y attendait, le terme I_0 a disparu dans le calcul de g .

Calcul au voisinage du pôle $d=4$ Le pôle vient de $\int \int (x_1+x_2)^{-d/2} dx_1 dx_2$ pour x_1 et x_2 proches de zéro. On pose $\varepsilon = 4-d$. Alors on a $\mathcal{I}'(d) \simeq \frac{2}{\varepsilon}$. Le rayon de giration du polymère s'écrit d'après l'équation (4.10)

$$R^2 = dS \left(1 + z \left(\frac{2}{\varepsilon} + \dots \right) + \mathcal{O}(z^2) \right). \quad (4.19)$$

On appelle souvent **gonflement** le rapport $\mathcal{X}_0(z) = \frac{R^2}{dS}$. L'exposant critique ν qui caractérise ce gonflement ($R^2 \sim S^{2\nu}$, voir l'équation (1.19)) s'en déduit alors car si on pose

$$\sigma_0(z, \varepsilon) = S \frac{\partial}{\partial S} \ln \mathcal{X}_0, \quad (4.20)$$

alors $\sigma_0 = \frac{\varepsilon}{2} z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2}{\varepsilon} z \right) = z + \mathcal{O}(z^2)$ et de plus $\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_0 = \sigma_0^* = 2\nu - 1$.

On peut également déduire l'expression de g en fonction de z et de ε

$$\begin{aligned} g &= - \left(2\pi \frac{R^2}{d} \right)^{-d/2} \frac{Z_2^c}{Z^2} \\ &= - \left(2\pi S \left(1 + z \frac{2}{\varepsilon} + \dots \right) \right)^{-d/2} (-bS^2) (1 - 2z\mathcal{I}'(d)) \\ &= z \left(1 + z \frac{2}{\varepsilon} \right)^{-d/2} \left(1 - 2z \frac{2}{\varepsilon} \right) \\ g &= z \left(1 - z \frac{8}{\varepsilon} + \mathcal{O}(z^2) \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

(On a donc $z = g + \frac{8}{\varepsilon} g^2 + \mathcal{O}(g^3)$.) Ce qui permet d'écrire la fonction de Wilson

$$\begin{aligned} W[g, \varepsilon] &= S \frac{\partial}{\partial S} g = \frac{\varepsilon}{2} z \frac{\partial}{\partial z} g \\ &= \frac{\varepsilon}{2} g - 4g^2 + \mathcal{O}(g^3) \end{aligned} \quad (4.22)$$

et donc de déduire que

$$\boxed{g^* = \frac{\varepsilon}{8} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}. \quad (4.23)$$

Ainsi l'exposant ν vaut $\nu = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{8}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

En effectuant les mêmes calculs à l'ordre suivant on trouve

$$g^* = \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon^2}{16} \left(\frac{25}{16} + \ln 2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (d = 4 - \varepsilon)$$

Pour faire le lien avec les expériences, notons que g est mesurable à partir de la pression osmotique (éq. 4.14 et 4.15). Le gonflement peut également être évalué grâce à des méthodes de diffusion de neutrons.

Signalons qu'en $d = 2$ on obtient par d'autres techniques $\nu = \frac{3}{4}$ ($d = 2$) mais qu'on ne connaît pas g^* .

On peut ici faire le même raisonnement qu'à la section 3.3 avec $a = 8$ et $b = 2$ en s'intéressant non pas à \mathcal{Z} mais à \mathcal{X}_0 . Ce qui donne, après resommation partielle de la série de perturbation

$$g = \frac{z}{1 + \frac{8}{\varepsilon}z}$$

$$\mathcal{X}_0 = \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}z\right)^{\frac{1}{4}} \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z^{\frac{1}{4}} \sim S^{\frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{4}} \sim S^{\frac{\varepsilon}{8}}.$$

Chapitre 5

Membranes polymérisées

Une extension intéressante de la théorie des polymères, analogue on l'a vu à la théorie des champs, est la théorie des membranes polymérisées, c'est à dire d'un objet de dimension supérieure à 1, que l'on notera D *plongée* dans un espace de dimension supérieure, notée d . Cette théorie présente une analogie avec la théorie des cordes.

Ce problème n'a été étudié que très récemment. En 1987 des simulations numériques assimilant la membranes à un treillis dont les mailles bougent avec des contraintes potentielles et de volume exclu ont été réalisées pour la première fois. On y voit qu'une membrane plate ($D = 2$) dans un espace tridimensionnel est plate, mais que si $d = 4$ un froissement apparaît à toute température et que pour $d \geq 5$ elle est totalement froissée.

5.1 Modèle d'Edwards pour les membranes

Le contenu de cette section fait suite aux travaux de Nelson et Kardar REF et et Aharonovitz et Lubenski REF.

5.1.1 Hamiltonien d'interaction

On désignera dans la suite par x la variable de coordonnée sur la membrane ($x \in \mathbf{R}^D$) et par $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^d$ la position d'un point dans l'espace de plongement. On supposera que la membrane est une variété notée \mathcal{V} de volume X^D . On appellera modèle d'Edwards pour une membrane le modèle traitant d'une membrane fluctuant dans l'espace et en interaction avec elle-même. Le hamiltonien du modèle

d'Edwards pour une membrane s'écrit, par analogie avec celui des polymères

$$\mathcal{H}[\mathbf{r}] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d^D x (\nabla_x \mathbf{r}(x))^2 + \frac{b}{2} \int \int_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}} d^D x_1 d^D x_2 \delta^d(\mathbf{r}(x_2) - \mathbf{r}(x_1)) \quad (5.1)$$

avec $(\nabla_x \mathbf{r})^2 = \sum_{\mu=1}^D \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_\mu} \right)^2$.

Comme en théorie des cordes il n'y a qu'un seul diagramme à chaque ordre car la variété \mathcal{V} privée d'un nombre fini de points est connexe par arcs. Ce modèle n'est donc pas une théorie de champs standard.

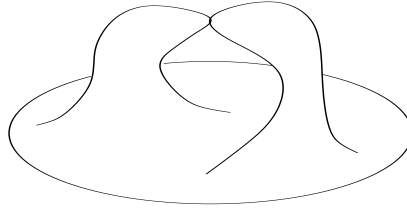


FIG. 5.1: Fluctuation d'une membrane en interaction avec elle-même. Ici il y a un contact, ce qui correspond au terme du développement perturbatif à l'ordre 1.

On peut aussi reproduire un modèle de membrane en interaction avec une impureté avec le hamiltonien suivant

$$\mathcal{H}_i[\mathbf{r}] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d^D x (\nabla_x \mathbf{r}(x))^2 + b \int_{\mathcal{V}} d^D x \delta^d(\mathbf{r}(x)).$$

5.1.2 Dimension critique supérieure

On pose $\mathcal{H}_0[\mathbf{r}] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d^D x (\nabla_x \mathbf{r}(x))^2$ et on note $\langle \varphi \rangle_0$ la moyenne libre

$$\langle \varphi \rangle_0 = \int \mathcal{D}\mathbf{r}(x) \varphi[\mathbf{r}] e^{-\beta \mathcal{H}_0[\mathbf{r}]}. \quad (5.2)$$

On cherche à calculer l'étalement de la membrane caractérisé par

$$\left\langle [\mathbf{r}(x_2) - \mathbf{r}(x_1)]^2 \right\rangle_0 = r(x_2 - x_1). \quad (5.3)$$

Une sorte d'analyse dimensionnelle donne une idée du résultat. Pour la théorie libre, la membrane de poids dominant ($r(X) \sim X$), le hamiltonien a pour valeur typique $X^D \left(\frac{r}{X}\right)^2$ normalisé à 1. Ainsi

$$r \sim X^{\frac{2-D}{2}} \quad (5.4)$$

et l'on applique à cette estimation une correction due à une perturbation. Pour le modèle d'Edwards on trouve ainsi une interaction typique

$$I_E \sim bX^{2D} r^{-d} \sim X^{2D-d\frac{2-D}{2}} \quad (5.5)$$

et pour l'interaction avec une impureté

$$I_i \sim bX^D r^{-d} \sim X^{D-d\frac{2-D}{2}}. \quad (5.6)$$

On peut donc en déduire les dimensions critiques supérieures de ces modèles. Pour le modèle d'Edwards et le modèle avec impureté respectivement

$$d_E^* = \frac{4D}{2-D} \quad d_i^* = \frac{2D}{2-D}. \quad (5.7)$$

Dans ces deux modèles, on $\lim_{D \rightarrow 2^-} d^* = +\infty$. Ainsi lorsque $D = 2$, pour d fixée l'interaction est relevante.

5.1.3 Théorie libre

Pour utiliser l'intégration gaussienne, on remarque que

$$\int_{\mathcal{V}} d^D x (\nabla_x \mathbf{r}(x))^2 = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} d^D x \operatorname{div}_x (\mathbf{r} \cdot \nabla_x \mathbf{r})}_{=0} - \int_{\mathcal{V}} d^D x \mathbf{r} \Delta_x \mathbf{r}$$

et ainsi la mesure de Wiener peut s'écrire

$$\mathcal{D}\mathbf{r} e^{-\frac{1}{2} \int d^D x (\nabla_x \mathbf{r})^2} = \mathcal{D}\mathbf{r} e^{-\frac{1}{2} \int d^D x \mathbf{r} \cdot (-\Delta_x) \mathbf{r}} \quad (5.8)$$

et on peut donc en déduire, en faisant le calcul présenté dans la section 1.2.3 de la fonction génératrice à deux points

$$\left\langle e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}(x_2) - \mathbf{r}(x_1))} \right\rangle_0 = \int \mathcal{D}\mathbf{r}(x) e^{-\frac{1}{2} \int d^D x \mathbf{r} \cdot (-\Delta_x) \mathbf{r} + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}(x_2) - \mathbf{r}(x_1))}, \quad (5.9)$$

que l'on note dans la suite $\mathcal{Z}_0(\mathbf{k})$. Détaillons un peu. On appelle $G_D(x - x')$ la solution de l'équation $-\Delta_x G(x - x') = \Delta[D](x - x')$. Ainsi on a

$$G_1(x - x') = -\frac{1}{2} |x - x'|, \quad (5.10a)$$

$$G_2(x - x') = -\frac{1}{2\pi} \ln \|x - x'\|, \quad (5.10b)$$

$$G_3(x - x') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - x'\|}. \quad (5.10c)$$

De façon générale $G_D = -\frac{1}{(2-D)S_D} \|x - x'\|^{2-D}$, où $S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$ est la $D - 1$ -mesure de la sphère S^{D-1} . En appelant $\mathbf{H}(x) = i\mathbf{k} (\delta^D(x - x_2) - \delta^D(x - x_1))$ la densité d'insertion de vecteur d'onde on a

$$i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}(x_2) - \mathbf{r}(x_1)) = \int_{\mathcal{V}} d^D x \mathbf{H}(x) \cdot \mathbf{r}(x)$$

et on peut reporter cette expression dans (5.9), qui devient ainsi une intégrale gaussienne usuelle. On aboutit à

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0(\mathbf{k}) &= \exp\left(\frac{1}{2} \int d^D x d^D x' \mathbf{H}(x) \mathbf{G}_D(x-x') \mathbf{H}(x')\right) \\ &= \exp\left(-\mathbf{k}^2 (\mathbf{G}_D(0) - \mathbf{G}_D(x_2 - x_1))\right); \end{aligned}$$

cette expression étant normalisée à 1 pour $\mathbf{k} = 0$ on obtient

$$\mathcal{Z}_0(\mathbf{k}) = \exp(\mathbf{k}^2 \mathbf{G}_D(x_2 - x_1)), \quad (5.11)$$

ce qui généralise le résultat (1.23). Le froissement se mesure alors en dérivant cette expression par rapport \mathbf{k}^2 :

$$\begin{aligned} \left\langle (\mathbf{r}(x_2) - \mathbf{r}(x_1))^2 \right\rangle_0 &= -2d \left. \frac{\partial \mathcal{Z}_0(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}^2} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} = -2d \mathbf{G}_D(x_2 - x_1) \\ &= \boxed{\frac{2d}{(2-D)S_D} \|x_2 - x_1\|^{D/2}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.2 Membrane en interaction avec une impureté

5.2.1 Développement perturbatif

La fonction de partition d'une membrane en interaction avec une impureté située en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ s'écrit

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\mathbf{r} \exp(-\beta \mathcal{H}_0[\mathbf{r}]) \exp\left(-b \int d^D x \delta^d(\mathbf{r}(x))\right) \quad (5.13)$$

et peut se développer perturbativement en b en développant la deuxième exponentielle en série entière

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b)^n}{n!} \mathcal{Z}_n, \quad (5.14)$$

$$\text{avec } \mathcal{Z}_n = \int \mathcal{D}\mathbf{r} e^{-\beta \mathcal{H}_0[\mathbf{r}]} \int \prod_{i=1}^n d^D x_i \prod_{i=1}^n \delta^d(\mathbf{r}(x_i)). \quad (5.15)$$

On définit alors le barycentre de la membrane par

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{V} \int d^D x \mathbf{r}(x) \quad (5.16)$$

où $V = X^D$ et cherche à fixer ce point, par exemple à l'origine. ce qui change l'expression de \mathcal{Z}_n . On pose $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_G$ et l'on introduit cette nouvelle variable

ce qui change l'expression de \mathcal{Z}_n . On écrit de plus les fonctions de Dirac sous la forme d'une transformée de Fourier $\delta^d(\mathbf{r}(x)) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_n &= (2\pi)^{-nd} \int \mathcal{D}\mathbf{r} e^{-\beta \mathcal{H}_0[\mathbf{r}]} \int d^d \mathbf{r}_0 \delta^d(\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_0) \\ &\quad \iint \prod_{i=1}^n d^d \mathbf{k}_i \prod_{i=1}^n d^D x_i e^{i \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}(x_i)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

et on pose enfin $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, or \mathcal{H}_0 est invariant par translation et $\mathcal{D}\mathbf{r}$ aussi mais pas $e^{i \sum_i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}(x_i)}$ qui est donc égal à $e^{i \sum_i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}'(x_i)} e^{i \sum_i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_0}$ dont l'intégrale sur \mathbf{r}_0 donne un terme $(2\pi)^d \delta^d(\sum_i \mathbf{k}_i)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_n &= (2\pi)^{-(n-1)d} \int \mathcal{D}\mathbf{r}'(x) \delta^d(\mathbf{r}'_G) e^{-\beta \mathcal{H}_0[\mathbf{r}']} \\ &\quad \iint_{\mathbf{R}^d} \prod_{i=1}^n d^d \mathbf{k}_i \prod_{i=1}^n d^D x_i \delta^d\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i\right) \exp\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}'(x_i)\right) \\ &= (2\pi)^{-(n-1)d} \iint \prod_{i=1}^n d^d \mathbf{k}_i \prod_{i=1}^n d^D x_i \delta^d\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i\right) \left\langle e^{i \sum_i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}(x_i)} \right\rangle_0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

On vient d'introduire la notation $\langle f[\mathbf{r}] \rangle_0$, comme aux chapitres précédents (voir les expressions (1.22) et (3.4)). Cette fois-ci la moyenne est calculée pour les membranes dont le centre de gravité est à l'origine, comme souhaité. Ceci retire un terme de volume inutile de l'expression de \mathcal{Z} . Ainsi $\langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \rangle_0$ vaut 1 si $\mathbf{k} = 0$.

Nous avons obtenu une expression en développement perturbatif de la fonction de partition. Il nous reste à calculer les propagateurs dans le cas général de la membrane.

5.2.2 Calcul des propagateurs

Comme pour la théorie libre, on introduit un vecteur de densité d'impulsion entrante

$$\mathbf{H}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} i\mathbf{k}_i (\delta^D(x - x_i) - \delta^D(x - x_n)) \quad (5.19)$$

et ainsi

$$\sum_{i=1}^n i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}(x_i) = \int d^D x \mathbf{H}(x) \cdot \mathbf{r}(x).$$

On en déduit que le propagateur cherché vaut

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{i \sum_i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}(x_i)} \right\rangle_0 &= \exp \left(\frac{1}{2} \int d^D x \int d^D x' \mathbf{H}(x) G_D(x-x') \cdot \mathbf{H}(x') \right) \\
&= \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{k}_i G_D(x_i - x_j) \cdot \mathbf{k}_j \right) \\
&= \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j \right. \\
&\quad \left. \times (G_D(x_i - x_j) - G_D(x_i - x_n) - G_D(x_n - x_j) + G_D(0)) \right)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

L'expression (5.20) est obtenue en utilisant le fait que la somme des \mathbf{k}_i est nulle. On pose alors $P_{ij} = G_D(x_i - x_j) - G_D(x_i - x_n) - G_D(x_n - x_j) + G_D(0)$. P peut être vu comme un opérateur linéaire agissant sur l'espace réciproque des \mathbf{k} . On est ramené alors à une intégrale gaussienne et on obtient l'expression de \mathcal{Z}_n sur laquelle on va travailler

$$\mathcal{Z}_n = (2\pi)^{-d(n-1) + \frac{d}{2}(n-1)} \int \prod_{i=1}^n d^D x_i (\det P_{ij})^{-d/2}. \tag{5.21}$$

Dans cette dernière expression, la dimension d de plongement n'apparaît plus qu'en exposant dans le préfacteur et pour le déterminant. Tout le reste de l'expression est relié à la dimension D de la membrane.

5.3 Étude du déterminant $\det P$

5.3.1 Zéros du déterminant

Le calcul du déterminant de (5.21) peut être simplifié en changeant la base des $\{\mathbf{k}_i\}$. En dimension 1 on peut ordonner les x_i et le déterminant est alors le produit des distances ordonnées $\prod_i |x_{i+1} - x_i|$. Il est important de savoir quand le déterminant s'annule car cela conduit à une divergence de l'intégrale. $G_D(x_i - x_j) \sim |x_i - x_j|^{2-D}$. On pose

$$\nu \stackrel{\text{dét}}{=} \frac{2-D}{2} \tag{5.22}$$

or on a vu (équation 5.12) que

$$\begin{aligned}
\left\langle (\mathbf{r}(x_i) - \mathbf{r}(x_j))^2 \right\rangle_0 &\propto |x_i - x_j|^{2\nu} \\
&\propto G_D(x_i - x_j)
\end{aligned}$$

ce qui signifie que G_D convertit les distances dans la membranes (dimension D) en distances dans l'espace de plongement (dimension d). Il n'y a pas d'autres divergences dans l'intégrale (5.21) que les coïncidences de points.

Démonstration analytique

Démontrons cette dernière affirmation. La remarque précédente définit la dimension fractale de la membrane qui est ν qui n'est pas nécessairement entière. Calculons alors le propagateur G_D effectif pour $\nu \in]0; 1[$. ($\nu < 1$ correspond à un objet froissé et $\nu = 1$ à un objet étendu.)

$$G_D(\underbrace{x_i - x_j}_{\in \mathbf{R}^M}) = C(M, \nu) \int \frac{d^M q}{(2\pi)^M} |q|^{-2\nu - M} \left(e^{iq \cdot (x_i - x_j)} - 1 \right) \quad (5.23)$$

$$C(M, \nu) = 2^{2\nu + M} \frac{\pi^{M/2} \nu \Gamma\left(\frac{M}{2} + \nu\right)}{\Gamma(1 - \nu)} \quad (5.23')$$

On retire 1 à l'exponentielle car $q^{-2\nu - M} d^M q \sim q^{-2\nu} dq$ et comme le terme d'ordre 1 en q n'intervient pas, le premier terme jouant un rôle dans l'exponentielle est bien proportionnel à q^2 . Maintenant il nous reste à calculer le déterminant. Comme $\sum_{ij} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j = 0$ on peut écrire l'exposant $Q(\{\mathbf{k}_i\})$ de (5.20) sous la forme

$$\begin{aligned} Q(\{\mathbf{k}_i\}) &= \sum_{i,j=1}^n \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j G_D(x_i - x_j) \\ &= C(D, \nu) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} q^{-2\nu - D} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i e^{iq \cdot x_i} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j e^{-iq \cdot x_j} \right) \\ &= C(D, \nu) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} q^{-2\nu - D} \left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i e^{iq \cdot x_i} \right\|^2; \end{aligned} \quad (5.24)$$

un vecteur propre de valeur propre nulle de P_{ij} est donc tel que

$$\forall q \in \mathbf{R}^D, \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i e^{iq \cdot x_i} = 0 \quad (5.25)$$

Si l'on intègre (5.25) sur l'espace des q on trouve : $\sum_i \mathbf{k}_i \delta^D(x - x_i) = 0$. Par exemple avec trois vecteurs 0, -1 et 1 (car $\sum_i \mathbf{k}_i = 0$) il faut que les deux vecteurs non nuls soient superposés et s'annulent.

On a donc prouvé que les seules divergences dans le calcul de l'intégrale (5.21) sont les coïncidences de points.

Démonstration par analogie électrostatique

Une autre démonstration repose sur la construction d'un arbre orienté T qui contient les n points $\{x_i\}$. Cet arbre comporte donc $n - 1$ liens, indexés par α . On définit la matrice d'incidence points-lignes par

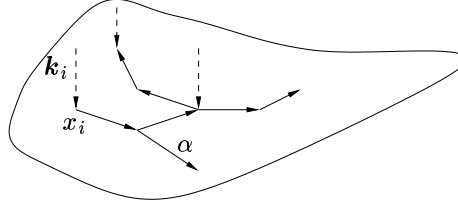


FIG. 5.2: *Arbre orienté construit sur la membrane. Chaque nœud est situé sur un point x_i et chaque lien transporte un impulsion dans le sens de l'orientation du lien.*

$$\mu_{i\alpha}^T = \begin{cases} +1 & \text{si le lien } \alpha \text{ arrive au point } x_i \\ -1 & \text{si le lien } \alpha \text{ part du point } x_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.26)$$

et on définit une impulsion \mathbf{q}_α sur chaque lien vérifiant la règle de conservation vectorielle prenant en compte les échanges avec l'extérieur :

$$\forall i, \mathbf{k}_i = \sum_{\alpha} \mu_{i\alpha}^T \mathbf{q}_\alpha. \quad (5.27)$$

On peut alors vérifier que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i = \sum_i \sum_{\alpha} \mu_{i\alpha}^T \mathbf{q}_\alpha = \sum_{\alpha} \underbrace{\left(\sum_i \mu_{i\alpha}^T \right)}_{=0} \mathbf{q}_\alpha = \mathbf{0}.$$

On remplace alors la mesure $\prod_{i=1}^n \frac{d^d \mathbf{k}_i}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i)$ par

$$\prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{d^d \mathbf{q}_\alpha}{(2\pi)^d} \quad (5.28)$$

et on écrit symboliquement $\mathbf{k} = \mu^T \cdot \mathbf{q}$ l'ensemble des relations (5.27).

La forme quadratique $Q(\{\mathbf{k}_i\})$ s'exprime sous la forme

$$Q(\{\mathbf{k}_i\}) = {}^t \mathbf{k} \cdot \mathbf{G}_D \cdot \mathbf{k} = {}^t \mathbf{q} \cdot \underbrace{{}^t \mu^T \cdot \mathbf{G}_D \cdot \mu^T}_{\stackrel{\text{déf}}{=} \Pi^T} \cdot \mathbf{q}. \quad (5.29)$$

Rappelons que μ^T dépend de l'arbre T choisi, donc Π^T également.

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}^T &= \sum_{i,j=1}^n \mu_{i\alpha}^T \mathbf{G}_D(x_i, x_j) \mu_{j\beta}^T \\ &= \mathbf{G}_D(x_{i_\alpha^+}, x_{j_\beta^+}) - \mathbf{G}_D(x_{i_\alpha^-}, x_{j_\beta^+}) - \mathbf{G}_D(x_{i_\alpha^+}, x_{j_\beta^-}) + \mathbf{G}_D(x_{i_\alpha^-}, x_{j_\beta^-}) \end{aligned}$$

(en notant i_α^+ et i_α^- les extrémités du lien α) signifie que Π^T est une matrice d'interaction dipôle-dipôle le potentiel électrostatique étant G_D . On est donc ramené à un problème d'électrostatique et

$$\mathcal{Z}_n = \int \prod_{i=1}^n d^D x_i \prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{d^d q_\alpha}{(2\pi)^d} e^{-\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} {}^t q_\alpha \cdot \Pi^T \cdot q_\beta}$$

est la fonction de partition d'un système de dipôles. Elle s'écrit aussi sous la forme

$$\mathcal{Z}_n = \int \prod_{i=1}^n d^D x_i (2\pi)^{-\frac{d}{2}(n-1)} (\det \Pi^T)^{-\frac{d}{2}}. \quad (5.30)$$

Quels sont alors les vecteurs propres de valeur propre zéro pour Π^T , puisque l'expression de \mathcal{Z}_n ne diverge que dans ces cas-là? On sait grâce à l'analogie électrostatique que pour minimiser l'énergie, il faut que la charge totale soit *localement* nulle. Ce qui n'est réalisé que si les charges (donc les x_i) coïncident.

Exemple Lorsque $D = 1$ on ordonne les points et on choisit pour T l'arbre linéaire tel que le premier lien aille de x_1 à x_2 et ainsi de suite. lors :

$$\Pi_{\alpha\beta}^T = -\frac{1}{2}(\ell_{++} + \ell_{--} - \ell_{-+} - \ell_{+-}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ s_\alpha & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

et donc $\det \Pi^T = \prod_{\alpha=1}^{n-1} s_\alpha$ (Voir la figure 5.3).

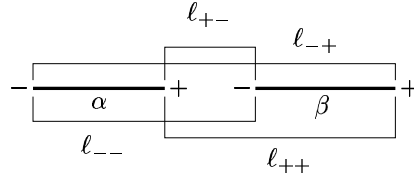


FIG. 5.3: Distances servant à calculer Π^T dans le cas de la dimension 1. Le calcul du déterminant illustre la pertinence du choix de l'arbre linéaire.

5.3.2 Changement de variables

Pour calculer le déterminant de P on va chercher à définir la mesure $\prod_i d^D x_i$ pour D compris entre 0 et 2 et à donner un sens à cette écriture. Pour ce faire on commence par choisir D arbitrairement grand, plus grand que $n - 1$, puis par prolongement analytique on se ramènera à $D \in]0; 2[$.

On note $a_{ij} = \|x_i - x_j\|^2$ et $u_{ij} = x_i \cdot x_j$ et on cherche le jacobien du changement de coordonnées $\{x_i\} \rightarrow \{a_{ij}\}$ afin d'écrire la mesure intrinsèque de la membrane

$$\prod_{i=1}^n d^D x_i = \mathcal{V} \prod_{i < j} da_{ij}.$$

Une transformation linéaire (polarisation) permet de réécrire cette dernière forme :

$$\prod_{i=1}^n d^D x_i \int \prod_{i \leq j} \delta(u_{ij} - x_i \cdot x_j) \prod_{i \leq j} du_{ij}.$$

Ceci nous invite à considérer la nouvelle mesure

$$\sigma_n^D(\{u_{ij}\}) \stackrel{\text{dét}}{=} \int_{\mathbf{R}^D} \prod_{i=1}^n d^D x_i \prod_{i \leq j} \delta(u_{ij} - x_i \cdot x_j) \quad (5.31)$$

dont on peut noter que l'intégrand est invariant par changement de repère orthonormé. $[u_{ij}]$ est symétrique réel, donc diagonalisable. On appelle alors $\{\lambda_i\}$ ses valeurs propres, et considérons désormais que $[u_{ij}]$ est orthogonale. Alors σ_n^D s'écrit

$$\sigma_n^D(\{u_{ij}\}) = \int_{\mathbf{R}^D} \prod_{i=1}^n d^D x_i \prod_{i \leq j} \delta(\lambda_i \delta_{ij} - x_i \cdot x_j)$$

qui se simplifie si on effectue les changements de variable $x_i \rightarrow \sqrt{\lambda_i} x'_i$

$$\begin{aligned} \sigma_n^D(\{u_{ij}\}) &= \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{D}{2} - 1 - \frac{n-1}{2}} \int_{\mathbf{R}^D} \prod_{i=1}^n d^D x_i \prod_{i \leq j} \delta(\delta_{ij} - x'_i \cdot x'_j) \\ &= (\det[u_{ij}])^{\frac{D-1-n}{2}} \int_{\mathbf{R}^D} \prod_{i=1}^n d^D x_i \prod_{i \leq j} \delta(\delta_{ij} - x'_i \cdot x'_j). \end{aligned} \quad (5.32)$$

On va maintenant calculer l'intégrale (5.32). On remarque que les x'_i qui contribuent à l'intégrale sont de norme 1 et qu'ils sont deux à deux orthogonaux. Le choix pour x'_1 se fait donc sur la sphère unité de \mathbf{R}^D , \mathcal{S}^{D-1} dont on a noté la mesure S_D (voir page 39). Pour x'_2 on doit choisir dans l'orthogonal de x'_1 qui est un espace de dimension $D-1$ donc x'_2 peut se trouver sur une sphère de dimension $D-2$. On poursuit alors ce raisonnement jusqu'à ce que on ne puisse plus choisir pour x'_n que sur la sphère \mathcal{S}^{D-n} . De plus, comme $\delta(1 - \|x\|^2) = \frac{1}{2} \delta(1 - \|x\|)$ il faut ajouter un facteur $1/2$ pour chaque x'_i soit un facteur 2^{-n} . On en déduit

$$\sigma_n^D(\{u_{ij}\}) = (\det[u_{ij}])^{\frac{D-1-n}{2}} 2^{-n} S_D S_{D-1} \dots S_{D-n+1}. \quad (5.33)$$

Annexe A

Introduction au calcul stochastique

A.1 L'intégrale stochastique

Mathématiquement, un mouvement brownien est une famille de variables aléatoires indexée par le temps. Si $(B_t)_{t \geq 0}$ désigne un mouvement brownien commençant à $t = 0$ alors on a $B_0(\omega) = \delta(\omega)$. On a deux propriétés importantes pour le mouvement brownien :

- $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue pour ω fixé ;
- Pour tous $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [f(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_p})] &= \int_{\mathbf{R}^p} dy_1 dy_2 \dots dy_p p_{t_1}(y_1) p_{t_2-t_1}(y_2 - y_1) \dots \\ &\quad \dots p_{t_p-t_{p-1}}(y_p - y_{p-1}) f(y_1, y_2, \dots, y_p) \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\text{où } p_t(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right).$$

En conséquence de A.1 la loi de $B_t - B_s$ est gaussienne, de densité p_{t-s} et est *indépendante* de $(B_r)_{r \leq s}$. On a donc pour toutes fonctions Φ et g

$$\mathbb{E} \left[\Phi \left((B_r)_{r \leq s} \right) g(B_t - B_s) \right] = \mathbb{E} \left[\Phi \left((B_r)_{r \leq s} \right) \right] \mathbb{E} [g(B_t - B_s)]$$

et le cas particulier important

$$\mathbb{E} \left[\Phi \left((B_r)_{r \leq s} \right) (B_t - B_s) \right] = 0.$$

A.1.1 Variation quadratique

On veut donner un sens à l'« intégrale stochastique »

$$\int_0^t H_s(\omega) dB_s(\omega).$$

Mais alors que si $s \mapsto B_s$ est de classe \mathcal{C}^1 , on peut calculer cette intégrale comme

$$\int_0^t H_s(\omega) \dot{B}_s(\omega) ds,$$

ici ce n'est pas possible car $s \mapsto B_s$ n'est pas dérivable.

Voyons cela plus précisément en nous intéressant à la variation quadratique définie, pour $t > 0$, par

$$A_n(t) = \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right)^2. \quad (\text{A.2})$$

On va montrer que $A_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t$ dans L^2 .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_n(t)] &= \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} \frac{1}{2^n} = \frac{[2^n t] + 1}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t \\ \mathbb{E}[A_n(t)^2] &= \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} \mathbb{E} \left[\left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right)^4 \right] \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2^n t \\ i \neq j}} \mathbb{E} \left[\left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right)^2 \right] \mathbb{E} \left[\left(B_{\frac{j+1}{2^n}} - B_{\frac{j}{2^n}} \right)^2 \right] \\ &= 3 \frac{[2^n t] + 1}{2^{2n}} + \frac{([2^n t] + 1)[2^n t]}{2^{2n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t^2 \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $\mathbb{E}[(A_n(t) - t)^2] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, ce qui prouve le résultat. Cette propriété montre que la fonction $t \mapsto B_t$ n'est pas de classe \mathcal{C}^1 car sinon on aurait

$$A_n(t) \leq \frac{[2^n t] + 1}{2^{2n}} \sup_{0 \leq s \leq t + \frac{1}{2^n}} \left| \frac{\partial}{\partial s} B_s \right|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

ce qui contredit le résultat précédent.

A.1.2 Construction de l'intégrale stochastique

On va définir l'intégrale pour une famille $(H_s)_{s \geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $s \mapsto H_s$ est continue ;

– pour tout s , H_s est fonction de la famille $(B_r)_{0 \leq r \leq s}$. Par exemple $H_s = f(B_s)$.

Ainsi, pour $s \leq u < v$, $B_v - B_u$ est indépendant de H_s . Soit $t > 0$, on pose

$$I_n(t) = \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} H_{\frac{i}{2^n}} \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right) \quad (\text{A.3})$$

On constate immédiatement que

$$E[I_n(t)] = \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} E \left[H_{\frac{i}{2^n}} \right] E \left[B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right] = 0$$

On va montrer que la suite $(I_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^2 . Commençons par calculer $E[I_n(t)^2]$.

$$E[I_n(t)^2] = E \left[\sum_{0 \leq i \leq 2^n t} H_{\frac{i}{2^n}}^2 \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right) \right]$$

en effet seuls ces termes contribuent car si $i < j$, les termes $B_{\frac{j+1}{2^n}} - B_{\frac{j}{2^n}}$ et $(B_r)_r \leq \frac{i+1}{2^n}$ sont indépendants donc

$$\begin{aligned} E \left[\left(B_{\frac{j+1}{2^n}} - B_{\frac{j}{2^n}} \right) \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right) H_{\frac{i}{2^n}} H_{\frac{j}{2^n}} \right] &= \\ E \left[\left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right) H_{\frac{i}{2^n}} H_{\frac{j}{2^n}} \right] E \left[\left(B_{\frac{j+1}{2^n}} - B_{\frac{j}{2^n}} \right) \right] &= 0 \end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu grâce au calcul effectué précédemment sur la variation quadratique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[I_n(t)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sum_{0 \leq i \leq 2^n t} H_{\frac{i}{2^n}}^2 \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right) \right] = E \left[\int_0^t H_s^2 ds \right].$$

Ceci ne suffit pas pour démontrer que $(I_n(t))_n$ est une suite de Cauchy, il nous faut encore calculer $E[I_n(t)I_m(t)]$ ce qui se fait de la même façon.

$$E[I_m I_n] = E \left[\sum_{\left[\frac{i}{2^m}, \frac{i+1}{2^m} \right] \subset \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right]} H_{\frac{i}{2^n}} H_{\frac{j}{2^m}} \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right) \left(B_{\frac{j+1}{2^m}} - B_{\frac{j}{2^m}} \right) \right]$$

s'évalue en décomposant $B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}}$ en $B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{j+1}{2^m}} + B_{\frac{j+1}{2^m}} - B_{\frac{j}{2^m}} + B_{\frac{j}{2^m}} - B_{\frac{i}{2^n}}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [I_m(t)I_n(t)] &= \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{0 \leq j \leq 2^m t \\ \frac{i}{2^n} \leq \frac{j}{2^m} \leq \frac{i+1}{2^n}} H_{\frac{i}{2^n}} H_{\frac{j}{2^m}} \left(B_{\frac{j+1}{2^m}} - B_{\frac{j}{2^m}} \right)^2 \right] \\
&\simeq \mathbb{E} \left[\sum_{0 \leq j \leq 2^m t} H_{\frac{j}{2^m}}^2 \left(B_{\frac{j+1}{2^m}} - B_{\frac{j}{2^m}} \right)^2 \right] \\
&\xrightarrow[m \rightarrow \infty]{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 ds \right].
\end{aligned}$$

On en déduit alors que $\mathbb{E} \left[(I_n(t) - I_m(t))^2 \right]$ vérifie le critère de Cauchy dans L^2 . Le calcul précédent montre aussi que

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_s ds \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 ds \right].$$

A.1.3 Exemple de calcul

$$\begin{aligned}
\int_0^t B_s dB_s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} B_{\frac{i}{2^n}} \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\sum_{0 \leq i \leq 2^n t} \left(B_{\frac{i+1}{2^n}}^2 - B_{\frac{i}{2^n}}^2 \right) - \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} (B_t^2 - t)
\end{aligned}$$

A.2 Formule d'Itô

A.2.1 Première forme de la formule d'Itô

On cherche à exprimer $f(B_t)$ lorsque f est une fonction suffisamment régulière (de classe \mathcal{C}^3). Si on remplace B_t par une fonction φ de classe \mathcal{C}^1 on a

$$\begin{aligned}
f(\varphi(t)) &= f(\varphi(0)) + \int_0^t f'(\varphi(s))\varphi'(s) ds \\
&= f(\varphi(0)) + \int_0^t f'(\varphi(s))d\varphi(s)
\end{aligned}$$

Mais nous allons voir que cette formule ne s'applique plus lorsque l'on veut calculer $f(B_t)$: un terme supplémentaire apparaît. On part de l'égalité approchée

$$f(B_t) \simeq f(B_0) + \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} \left(f\left(B_{\frac{i+1}{2^n}}\right) - f\left(B_{\frac{i}{2^n}}\right) \right),$$

et on utilise la formule de Taylor à l'ordre 2

$$\begin{aligned} f\left(B_{\frac{i+1}{2^n}}\right) - f\left(B_{\frac{i}{2^n}}\right) &= f'\left(B_{\frac{i}{2^n}}\right) \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} f''\left(B_{\frac{i}{2^n}}\right) \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}}\right)^2 + R_{i,n}, \end{aligned}$$

dans laquelle le reste $R_{i,n}$ vérifie l'inégalité $|R_{i,n}| < C \left| B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right|^3$. Or on sait que

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} f'\left(B_{\frac{i}{2^n}}\right) \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}}\right) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t f'(B_s) dB_s; \\ \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} f''\left(B_{\frac{i}{2^n}}\right) \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}}\right)^2 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t f''(B_s) ds; \\ \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} |R_{i,n}| &\leq \sup_{0 \leq i \leq 2^n t} \left| B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right| \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

En passant à la limite dans la formule (A.2.1) on obtient la *formule d'Itô* sous une première forme :

$$\boxed{f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds} \quad (\text{A.4})$$

Exemple Soit $f : x \mapsto x^2$, alors la formule d'Itô donne :

$$B_t^2 = B_0^2 + 2 \int_0^t B_s dB_s + t.$$

On peut facilement étendre ce résultat à une fonction dépendant du temps :

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, B_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds;$$

ainsi qu'au cas d'un mouvement brownien dans \mathbf{R}^d . On note alors B_t sous la forme $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$ où B^1, B^2, \dots, B^d sont des mouvements browniens dans \mathbf{R} , indépendants :

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \nabla f(s, B_s) \cdot dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, B_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(s, B_s) ds,$$

$$\text{où } \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

A.2.2 Application à l'équation de la chaleur

Le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2} \Delta u & \text{sur }]0, +\infty[\times \mathbf{R}^d \\ u(0, x) &= f(x) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

a pour solution $u(t, x) = \mathbb{E}_x [f(B_t)]$, où $\mathbb{E}_x [\cdot]$ désigne l'espérance prise pour les mouvements browniens partant de x ¹. Démontrons ce résultat. On fixe $T > 0$ et on applique la formule d'Itô avec $t \in [0, T]$.

$$u(T - t, B_t) = u(T, B_0) + \int_0^t \nabla u(T - s, B_s) \cdot dB_s,$$

car u vérifie l'équation de la chaleur (A.5). L'intégrale stochastique est d'espérance nulle, on obtient donc : $u(T, B_0) = \mathbb{E}_x [u(T - t, B_t)]$; lorsque $t = T$ on obtient donc

$$\boxed{u(T, x) = \mathbb{E}_x [u(T, B_T)]}.$$

On reformule le problème (A.5), avec cette fois-ci des conditions aux limites d'un domaine.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2} \Delta u & \text{sur }]0, +\infty[\times D \\ u(0, x) &= f(x) \\ u(t, y) &= 0 & \text{pour } y \in \partial D. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

La solution est alors donnée par la même méthode. On écrit $\sigma = \inf\{s | B_s \notin D\}$. On applique la formule d'Itô pour

$$u(T - t \wedge \sigma, B_{t \wedge \sigma}) = u(T, B_0) + \int_0^{t \wedge \sigma} \nabla u(T - s, B_s) \cdot dB_s,$$

on vérifie que l'espérance du terme stochastique est nulle et on obtient

$$u(T, x) = \mathbb{E}_x [u(T - T \wedge \sigma, B_{T \wedge \sigma})] = \mathbb{E}_x [f(B_T) \mathbf{1}_{\{T < \sigma\}}]$$

car sur $\{\sigma < T\}$, $u(T - T \wedge \sigma, B_{T \wedge \sigma}) = u(T - \sigma, B_\sigma) = 0$ à cause de la condition de nullité de u sur ∂D .

1. On peut vérifier cette formule à partir de l'expression

$$\mathbb{E}_x [f(B_t)] = \int dy p_t(y - x) f(y)$$

mais cette forme n'est plus disponible dans bien d'autres cas où la formule d'Itô est encore valable.

A.3 Les processus d'Itô

A.3.1 Définition

On peut généraliser la formule d'Itô à des processus aléatoires plus généraux que le mouvement brownien. On appelle **processus d'Itô** un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ s'écrivant sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t K_s ds \quad (\text{A.7})$$

avec H et K sont continus, H_s et K_s sont des fonctions de $\{B_r, r \leq s\}$ et, pour simplifier, X_0 est une constante. Pour un tel processus X on peut définir une notion de variation quadratique :

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} \left(X_{\frac{i+1}{2^n}} - X_{\frac{i}{2^n}} \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} \left(\int_{\frac{i}{2^n}}^{\frac{i+1}{2^n}} H_s dB_s \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} H_{\frac{i}{2^n}}^2 \left(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right)^2 \\ &= \int_0^t H_s^2 ds \end{aligned}$$

La formule d'Itô s'étend à de tels processus en remplaçant dans le terme d'Itô ds par $d\langle X, X \rangle_s = H_s^2 ds$. pour f de classe \mathcal{C}^3 :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

$$\text{avec } \int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) H_s dB_s + \int_0^t f'(X_s) K_s ds$$

$$\text{et } \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s = \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds$$

On peut également généraliser en plusieurs dimensions. Si B^1, B^2, \dots, B^d sont d mouvements browniens réels indépendants et si pour tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, X^j s'écrit

$$X_t^j = X_0^j + \sum_{i=1}^d \int_0^t H_s^{ij} dB_s^i + \int_0^t K_s^j ds$$

avec les mêmes hypothèses, alors

$$\begin{aligned} f(X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^p) &= f(X_0^1, X_0^2, \dots, X_0^p) + \sum_{j=1}^p \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j} (X_s^1, X_s^2, \dots, X_s^p) dX_s^j \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^p \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} (X_s^1, X_s^2, \dots, X_s^p) d\langle X_s^j, X_s^k \rangle_s \end{aligned}$$

où les crochets $\langle X^j, X^k \rangle$ sont définis par

$$\langle X^j, X^k \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq i \leq 2^n t} \left(X_{\frac{i}{2^n}}^j - X_{\frac{i-1}{2^n}}^j \right) \left(X_{\frac{i}{2^n}}^k - X_{\frac{i-1}{2^n}}^k \right)$$

et on vérifie que

$$d \langle X^j, X^k \rangle_s = \sum_{i=1}^d H_s^{ij} H_s^{ik} ds.$$

A.3.2 Application à la formule de Feynman-Kac

Notons $B = (B^1, B^2, \dots, B^d)$ un mouvement brownien en dimension d issu de x avec la probabilité $P(x)$. Si V est une fonction continue et bornée, positive sur \mathbf{R}^d , le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2} \Delta u - V \cdot u \quad \text{sur }]0, \infty[\times \mathbf{R}^d \\ u(0, x) &= f(x) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

a pour solution

$$u(t, x) = \mathbb{E}_x \left[f(B_t) \exp \left(- \int_0^t V(B_s) ds \right) \right].$$

La preuve ressemble au calcul déjà effectué pour l'équation de la chaleur. On applique la formule d'Itô à

$$u(T-t, B_t) \exp \left(- \int_0^t V(B_s) ds \right)$$

qui est une fonction des processus d'Itô $B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d$ et de $\int_0^t V(B_s) ds$.

$$\begin{aligned} & u(T-t, B_t) \exp \left(- \int_0^t V(B_s) ds \right) - u(T, B_0) \\ &= \int_0^t \nabla u(T-s, B_s) \exp \left(- \int_0^s V(B_r) dr \right) \cdot dB_s \\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s}(T-s, B_s) \exp \left(- \int_0^s V(B_r) dr \right) ds \\ &\quad - \int_0^t V(B_s) u(T-s, B_s) \exp \left(- \int_0^s V(B_r) dr \right) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta u(T-s, B_s) \exp \left(- \int_0^s V(B_r) dr \right) ds \\ &= \int_0^t \nabla u(T-s, B_s) \exp \left(- \int_0^s V(B_r) dr \right) \cdot dB_s \end{aligned}$$

car u vérifie l'équation (A.8). Comme l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle, on obtient le résultat annoncé en prenant $t = T$.

Annexe B

Les martingales

B.1 Notion de martingale

Il s'agit de la mathématisation du jeu *équitable*. L'espérance du gain reste constante au cours du temps. La notion de martingale est donc liée à l'existence d'un temps.

B.1.1 Martingales à temps discret

On commence par indexer le temps sur les entiers. On se donne une suite (X_n) de variables aléatoires d'univers Ω et de loi de probabilité P . Soit

$$\mathcal{F}_n \stackrel{\text{déf}}{=} \{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \Omega^n\}$$

l'ensemble des événements possibles jusqu'au temps n . La suite (\mathcal{F}_n) est une suite croissante de tribus boréliennes.

Définition B.1.1 (Martingale) Une suite $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires est une $((\mathcal{F}_n), P)$ -martingale si et seulement si

1. $\forall p \in \mathbf{N}$, M_p est \mathcal{F}_p -mesurable (c'est-à-dire que $E[M_p^2] < \infty$);
2. $\forall \Gamma_p \in \mathcal{F}_p$, $\forall p \leq q$ $E[\mathbf{1}_{\Gamma_p} M_q] = E[\mathbf{1}_{\Gamma_p} M_p]$.

La deuxième propriété exige en d'autres termes que si $p \leq q$, on ait $\Pi_p(M_q) = M_p$, où Π_p est la projection hilbertienne sur $L^2(\mathcal{F}_p)$.

Exemple Supposons les X_i centrées sur 0 ($E[X_i] = 0$). Vérifions que $M_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est une martingale.

$$E[\mathbf{1}_{\Gamma_p} M_q] = E[\mathbf{1}_{\Gamma_p} M_p] + E[\mathbf{1}_{\Gamma_p} \underbrace{E[X_{p+1} + \dots + X_q]}_{=0}]$$

B.1.2 Notion de temps d'arrêt

Si (M_n) est une martingale, et $T : \Omega \mapsto \bar{\mathbf{N}}$ une fonction dite de « temps d'arrêt », est-ce que $M_{n \wedge T} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} M_{n \wedge T(\omega)}$ ¹ est encore une martingale?

D\u00e9finition B.1.2 (Temps d'arrêt) On dit que $T : \Omega \mapsto \bar{\mathbf{N}}$ est un (\mathcal{F}_n) -temps d'arrêt si

$$\forall n \in \mathbf{N}, (T \leq n) \in \mathcal{F}_n$$

ou encore $\forall n \in \mathbf{N}, (T = n) \in \mathcal{F}_n$.

Exemple de temps d'arrêt On reprend l'exemple du paragraphe pr\u00e9c\u00e9dent. Soit $T = \inf\{n \mid M_n \geq a\}$. Alors $E[M_{T \wedge n}]$ est l'esp\u00e9rance d'avoir au plus a apr\u00e8s au plus le temps n . T est un temps d'arrêt car

$$(T \leq p) = \bigcup_{q \leq p} (M_q \geq a) \in \mathcal{F}_p.$$

$(T \leq q)$ est la partie de l'univers telle que l'on atteigne a en moins de q coups. De m\u00eame $(M_q \geq a)$ est la partie de l'univers telle que l'on d\u00e9passe a en exactement q coups.

L'introduction d'un temps d'arrêt, change la mesure de probabilit\u00e9. Dans certains cas, l'univers est restreint car certains \u00e9v\u00e9nements ne sont plus r\u00e9alisables. On modifie donc de ce fait la suite de variables al\u00e9atoires. Voyons \u00e0 quelle condition on conserve les propri\u00e9t\u00e9s des martingales.

Proposition B.1.3 (M_n) est une (\mathcal{F}_n) -martingale si et seulement si pour tout (\mathcal{F}_n) -temps d'arrêt T born\u00e9 on a

$$E[M_T] = E[M_0] \tag{B.1}$$

Soit (M_n) une martingale.

$$E[M_T] = E \left[\sum_{k=0}^n \underbrace{\mathbf{1}_{(T \geq k)}}_{\in \mathcal{F}_k} M_k \right] = E \left[\sum_{n=0}^k \mathbf{1}_{T \geq k} M_k \right] = E[M_n] = E[M_0]$$

Inversement si $E[M_T] = E[M_0]$, on consid\u00e8re p et q tels que $p \leq q$. On construit T tel que

$$T = \begin{cases} p & \text{sur } \mathcal{C}_{\Gamma_p} \\ q & \text{sur } \Gamma_p \end{cases}$$

$$E[M_p] = E[\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{\Gamma_p}} M_p] + E[\mathbf{1}_{\Gamma_p} M_p] = E[\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{\Gamma_p}} M_p]$$

$$E[M_q] = E[\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{\Gamma_p}} M_q] + E[\mathbf{1}_{\Gamma_p} M_q] = E[\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{\Gamma_p}} M_q]$$

1. On note $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Corollaire Si (M_n) est une (\mathcal{F}_n) -martingale et si T est un temps d'arrêt alors $(M_{n \wedge T})$ est une (\mathcal{F}_n) -martingale.

Il suffit de montrer que pour tout temps d'arrêt S borné on a $E[M_{T \wedge S}] = E[M_0]$ et c'est vrai car $T \wedge S$ est un temps d'arrêt borné.

$$(T \wedge S \geq n) = (T \geq n) \cap (S \geq n),$$

et en particulier $T \wedge S \leq S$.

B.1.3 Passage au temps continu, théorème d'arrêt

Le temps est maintenant pris dans $[0, +\infty)$, on construit $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$, la tribu borélienne munie de la mesure de l'espace de probabilité. La suite $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est croissante. La propriété fondamentale des martingales devient, pour $s \leq t$:

$$E[\mathbf{1}_{\Gamma_s} M_t] = E[\mathbf{1}_{\Gamma_s} M_s]$$

Un temps d'arrêt pour une martingale à temps continu est une fonction de Ω dans $[0, +\infty]$ telle que

$$\forall t, (T \leq t) \in \mathcal{F}_t.$$

Théorème B.1.4 (Théorème d'arrêt) *Le théorème d'arrêt est la traduction continue de la proposition (B.1).*

Soit $(M_t, t \geq 0)$. est une (\mathcal{F}_t) -martingale. telle que $\sup_{t \geq 0} E[M_t^2] < \infty$ et T un temps d'arrêt. Alors

$$E[M_T] = E[M_0].$$

Soit $(T_k)_{k \in \mathbf{N}}$ la suite de temps d'arrêt définie par

$$T_k = \sum_{m \in \mathbf{N}} \frac{m+1}{2^k} \mathbf{1}_{\{\frac{m}{2^k} < T \leq \frac{m+1}{2^k}\}}$$

et qui tend vers T , on peut alors appliquer le résultat (B.1).

B.2 Applications au mouvement brownien

Rappels Le mouvement brownien est défini par la suite de variable aléatoires (B_t) , telle que pour $s \leq t$, $B_t - B_s$ est une variable aléatoire gaussienne de variance $t - s$: $E[(B_t - B_s)^2] = |t - s|$.

B.2.1 Quelques exemples de martingales

- La suite des polynômes d'Hermite en B_t est une martingale. $M_t^{(1)} = B_t$;
 $M_t^{(2)} = B_t^2 - t, \dots$;

$$\begin{aligned}
- \mathcal{E}_t^{(\alpha)} &= \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right) \text{ est une martingale.} \\
- E[\mathbf{1}_{\Gamma_s} B_t] &= E[\mathbf{1}_{\Gamma_s} B_s] + E[\mathbf{1}_{\Gamma_s}] \underbrace{E[B_t - B_s]}_{=0} \\
- \text{Vérifions que } E[\mathbf{1}_{\Gamma_s} (B_t - B_s)^2] &= E[\mathbf{1}_{\Gamma_s} (t - s)] \\
E[\mathbf{1}_{\Gamma_s} \{(B_s + B_t - B_s)^2 - B_s^2\}] &= E[\mathbf{1}_{\Gamma_s} 2B_s] E[B_t - B_s] \\
&\quad + E[\mathbf{1}_{\Gamma_s}] E[(B_t - B_s)^2] \\
&= E[\mathbf{1}_{\Gamma_s} (t - s)] \\
&= E[\mathbf{1}_{\Gamma_s}] (t - s) \\
- E[\mathbf{1}_{\Gamma_s} \mathcal{E}_t^{(\alpha)}] &= E[\mathbf{1}_{\Gamma_s} \mathcal{E}_s^{(\alpha)}] \underbrace{E\left[e^{\alpha(B_t - B_s) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)}\right]}_{=1} \text{ en effet si } G \text{ est la} \\
&\quad \text{loi de probabilité gaussienne de variance } \sigma^2, G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \text{ alors} \\
E[\exp(\alpha G)] &= \exp\left(\frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Inversement, ces propriétés caractérisent le mouvement brownien.

B.2.2 Théorème de Lévy

Le seul processus $(X_t, t \geq 0)$ à trajectoires continues $t \mapsto X_t(\omega)$, tel que (X_t) et $(X_t^2 - t)$ soient des (\mathcal{F}_t) -martingales (avec $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$) est le mouvement brownien.

C'est-à-dire que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tous $t_1 < t_2 < \dots < t_p$ les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_p} - X_{t_{p-1}}$ sont indépendantes gaussiennes centrées de variances $t_i - t_{i-1}$.

D'après les propriétés des martingales

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \exp\left(\alpha X_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$$

est une martingale. On considère alors

$$E\left[\exp\left(\alpha_1 X_{t_1} - \frac{\alpha_1^2 t_1}{2}\right) \exp\left(\alpha_2 (X_{t_2} - X_{t_1}) - \frac{\alpha_2^2 (t_2 - t_1)}{2}\right)\right]$$

En posant $\Phi_{t_1} = \exp\left(\alpha_1 X_{t_1} - \frac{\alpha_1^2 t_1}{2}\right) \exp\left(-\alpha_2 X_{t_1} + \frac{\alpha_2^2 t_1}{2}\right)$, cette expression

$$\text{vaut } E[\Phi_{t_1} \mathcal{E}_{t_2}^{(\alpha_2)}] = E[\Phi_{t_1} \mathcal{E}_{t_1}^{(\alpha_1)}] = 1.$$

Tous les résultats qui suivent sont obtenus à l'aide du théorème d'arrêt appliqué à soit $B_t, B_t^2 - t, \mathcal{E}_t^{(\alpha)}$, soit à des combinaisons linéaires. Ainsi on trouve également que²

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathcal{E}_t^{(\alpha)} + \mathcal{E}_t^{(-\alpha)}) &= \text{ch}(\alpha B_t) e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}} \\ \frac{1}{2}(\mathcal{E}_t^{(\alpha)} - \mathcal{E}_t^{(-\alpha)}) &= \text{sh}(\alpha B_t) e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}} \end{aligned} \right\} \text{ sont des martingales.}$$

2. En réalité toutes les harmoniques d'espace-temps sont des martingales.

B.2.3 Mouvement brownien avec arrêt

Soit B un mouvement brownien tel que $B_0 = 0$, et $a \in \mathbf{R}_+$. Quelle sont les lois de probabilité de

$$T_a = \inf\{t, B_t = a\}$$

et de $T_a^* = \inf\{t, |B_t| = a\}$?

Pour résoudre le premier problème on utilise le fait que $\mathcal{E}_{t \wedge T_a}^{(\alpha)}$ est une martingale.

$$1 = E \left[\exp \left(\alpha B_{t \wedge T_a} - \frac{\alpha^2}{2} (t \wedge T_a) \right) \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E \left[\exp \left(\alpha B_{T_a} - \frac{\alpha^2}{2} T_a \right) \right],$$

comme $B_{T_a} = a$ on obtient $E \left[\exp \left(\frac{\alpha^2}{2} T_a \right) \right] = e^{-a|\alpha|}$. On pose $z = \alpha^2/2$, soit $\alpha = \sqrt{2z}$. Alors on interprète $E[\exp(-zT_a)] = e^{-a\sqrt{2z}}$ comme la transformée de Laplace de P_{T_a} . On en déduit que

$$P_{T_a}(t) = q_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}.$$

$$e^{-a|\alpha|} = E \left[e^{i a \alpha C_1} \right] = E \left[e^{-\frac{a^2 \alpha^2}{2N_1^2}} \right]$$

où C_a est la loi de Cauchy de paramètre a , et N_1' est la loi normale sur \mathbf{R}_+ .

$$I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{a^2 \alpha^2}{2u^2}} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a|\alpha|} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \left(u - \frac{a|\alpha|}{u} \right)^2} du,$$

$$v = \frac{a|\alpha|}{u} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a|\alpha|} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \left(v - \frac{a|\alpha|}{v} \right)^2} \frac{a|\alpha|}{v^2} dv;$$

$$2I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a|\alpha|} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \left(x - \frac{a|\alpha|}{x} \right)^2} \left(1 + \frac{a|\alpha|}{x^2} \right) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a|\alpha|} \sqrt{2\pi};$$

$$\text{Ainsi } T_a \stackrel{\text{loi}}{\equiv} \frac{a^2}{N_1'^2}.$$

Pour calculer T_a^* , on procède de la même façon que précédemment avec la martingale $\text{ch}(\alpha B_{t \wedge T_a^*}) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} t \wedge T_a^*\right)$.

$$1 = E \left[\text{ch}(\alpha B_{t \wedge T_a^*}) e^{-\frac{\alpha^2}{2} t \wedge T_a^*} \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E \left[\text{ch}(\alpha B_{T_a^*}) e^{-\frac{\alpha^2}{2} T_a^*} \right]$$

or $|B_{T_a^*}| = a$ donc

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left(-\frac{\alpha^2}{2} T_a^* \right) \right] &= \frac{1}{\text{ch } a\alpha} \\ &= \frac{2e^{-a\alpha}}{1 + e^{-2a\alpha}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)a\alpha} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n E \left[\exp \left(-\frac{\alpha^2}{2} T_{(2n+1)a} \right) \right]. \end{aligned}$$

Le résultat s'obtient alors par la linéarité de l'espérance :

$$q_a^*(t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q_{(2n+1)a}(t).$$

B.2.4 Problèmes d'extrémums

Soit (M_t) une martingale telle que $M_0 = a > 0$ et qui converge vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. Avec les notations précédentes $M_t = a - B_{t \wedge T_a}$. Ainsi M_t est une martingale positive. La situation est illustrée sur la figure B.2.4. Alors

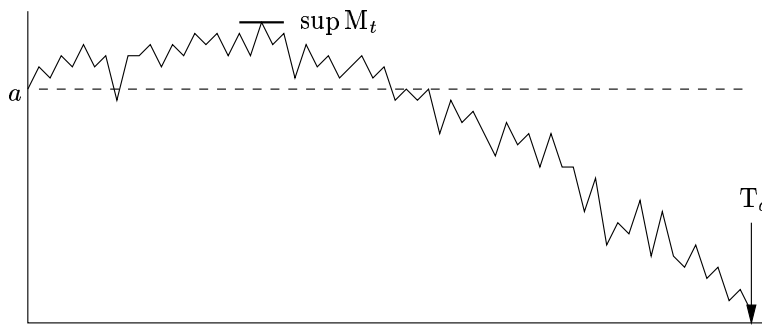


FIG. B.1: Recherche de l'extrémum d'un mouvement brownien borné inférieurement.

$$\sup_{t \geq 0} M_t \stackrel{\text{loi}}{\equiv} \frac{a}{U}$$

où U représente la loi uniforme sur $[0,1]$.

On voit ainsi que $P(\sup_{t \geq 0} M_t \geq x) = P(\frac{a}{U} \geq x) = \frac{a}{x}$, la densité de probabilité de $\sup_{t \geq 0} M_t$ est

$$P_{\text{sup}}(x) = \frac{a}{x^2} \mathbf{1}_{\{x \geq a\}}.$$

On pose $T_x = \inf\{t | M_t \geq x\}$. On a alors

$$E[M_{T_x}] = \int M_\tau P(T_x = \tau) d\tau = x P\left(\sup_{t \geq 0} M_t \geq x\right)$$

et de plus $E[M_{T_x}] = a$ car $E[B_t] = 0$. Il en découle le résultat central de ce paragraphe.

Soit $B_t^{(-\mu)} = B_t - \mu t$. $B_t^{(-\mu)}$ tend vers $-\infty$ avec une probabilité de 1. On cherche à calculer la loi de

$$\sup_{t \geq 0} B_t^{(-\mu)}.$$

On remarque que $\exp(\alpha B_t^{(-\mu)}) = \exp(\alpha B_t - \alpha \mu t)$ est une martingale si et seulement si $\alpha = 2\mu$. D'après le résultat précédent on a

$$\sup_{t \geq 0} \exp(2\mu(B_t - \mu t)) \stackrel{\text{loi}}{\equiv} \frac{1}{U}.$$

Alors, en prenant le logarithme,

$$2\mu \sup_{t \geq 0} (B_t - \mu t) \stackrel{\text{loi}}{\equiv} \ln \left(\frac{1}{U} \right) \stackrel{\text{loi}}{\equiv} \mathbf{e},$$

où \mathbf{e} est la loi exponentielle³. Il s'ensuit que

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} B_t^{(-\mu)} = x \right) = 2\mu e^{-2\mu x}.$$

3. En effet on a

$$\mathbb{P} \left(\ln \frac{1}{U} \geq x \right) = \mathbb{P} \left(\frac{1}{U} \geq e^x \right) = \mathbb{P} (U \leq e^{-x}) = e^{-x}$$

Table des figures

1.1	Marche aléatoire sur $(a\mathbf{Z})^2$	1
1.2	Statistique d'un mouvement brownien	5
2.1	Interaction d'un brownien avec une impureté	11
2.2	Brownien passant une seule fois par l'origine	12
2.3	Calcul de $\theta(x)$	13
2.4	La fonction $g(z)$	15
3.1	Diagramme d'ordre deux de la fonction de partition connexe . . .	21
4.1	Représentation en diagramme de Feynman : le propagateur . . .	26
4.2	Théorie des champs à l'ordre d'une boucle	26
4.3	Diagrammes d'ordre zéro et un de la fonction de partition d'un polymère	27
4.4	Terme d'ordre un de \mathcal{Z}_2^c	32
4.5	Termes d'ordre deux de \mathcal{Z}_2^c dans lequel les deux polymères interagissent deux fois	32
4.6	Termes d'ordre deux de \mathcal{Z}_2^c dans lesquels un polymère auto-interagit	33
5.1	Membrane en interaction avec elle-même	38
5.2	Arbre orienté sur une membrane	44
5.3	Illustration du calcul du déterminant en dimension 1	45
B.1	Exemple de recherche d'extrémum	61

Bibliographie

- [1] Fischer *Walks walls waiting and melting*, *J. Stat. Phys.* **34** 667 (1984)
- [2] D. Williams *Probability with martingales*, Cambridge University Press 1991
- [3] P. Revuz *Random walks in random environment* World Scientific
- [4] Durrett *Brownian motion and martingales analysis* Wordworth
- [5] Rao *Brownian motion and potential* Aarhus 1977
- [6] J.-F. Legall *Some properties of planar brownian motion* Springer 1992

Table des matières

Préface	v
1 Premières notions sur les polymères	1
1.1 Marches aléatoires	1
1.1.1 Définition	1
1.1.2 Rappel: intégrales gaussiennes	2
1.1.3 Passage à la limite continue	2
1.2 Le modèle d'Edwards	4
1.2.1 Historique	4
1.2.2 Nécessité de l'intégrale fonctionnelle	5
1.2.3 Calcul du propagateur avec l'intégrale fonctionnelle	6
1.3 Intersection d'objets aléatoires	7
2 Interaction d'un brownien avec une impureté	9
2.1 La fonction de partition	9
2.1.1 Calcul de la fonction de partition	9
2.1.2 Calcul des termes de la série	12
2.2 Renormalisation	14
2.2.1 Renormalisation de la constante de couplage	14
2.2.2 Fonction de scaling	15
2.2.3 Cas des dimensions $d \geq 2$	16
2.2.4 Fonctions de Wilson	16
3 Évitement de deux browniens	19
3.1 Modèle d'Edwards	19
3.1.1 Calcul perturbatif	20
3.1.2 Approche diagrammatique	20
3.2 Renormalisation du problème	22
3.2.1 Calcul de la fonction de Wilson	22
3.2.2 Limite des objets grands	22
3.2.3 Le cas de la dimension 4	23
3.3 Compléments sur les développements	23
4 Polymères autoévitant	25
4.1 L'analogie polymères–théorie des champs	25

4.2	Théorie des polymères	26
4.2.1	Remarques générales	26
4.2.2	Calcul au premier ordre en b	27
4.2.3	Régularisation dimensionnelle	28
4.3	Renormalisation	30
4.3.1	Pression osmotique	30
4.3.2	Calcul de Z_2^c	31
4.3.3	Théorie effective des polymères	33
5	Membranes polymérisées	37
5.1	Modèle d'Edwards pour les membranes	37
5.1.1	Hamiltonien d'interaction	37
5.1.2	Dimension critique supérieure	38
5.1.3	Théorie libre	39
5.2	Membrane en interaction avec une impureté	40
5.2.1	Développement perturbatif	40
5.2.2	Calcul des propagateurs	41
5.3	Étude du déterminant $\det P$	42
5.3.1	Zéros du déterminant	42
5.3.2	Changement de variables	45
A	Introduction au calcul stochastique	48
A.1	L'intégrale stochastique	48
A.1.1	Variation quadratique	49
A.1.2	Construction de l'intégrale stochastique	49
A.1.3	Exemple de calcul	51
A.2	Formule d'Itô	51
A.2.1	Première forme de la formule d'Itô	51
A.2.2	Application à l'équation de la chaleur	53
A.3	Les processus d'Itô	54
A.3.1	Définition	54
A.3.2	Application à la formule de Feynman-Kac	55
B	Les martingales	56
B.1	Notion de martingale	56
B.1.1	Martingales à temps discret	56
B.1.2	Notion de temps d'arrêt	57
B.1.3	Passage au temps continu, théorème d'arrêt	58
B.2	Applications au mouvement brownien	58
B.2.1	Quelques exemples de martingales	58
B.2.2	Théorème de Lévy	59
B.2.3	Mouvement brownien avec arrêt	60
B.2.4	Problèmes d'extrémums	61
	Listes des figures	63
	Bibliographie	64