Géométrie d'un rayon lumineux dans un milieu inhomogène à pouvoir rotatoire

V. Rossetto

Je présente ici le calcul original de Rytov publié dans [1] et traduit dans le livre [2] adapté à un milieu possédant un pouvoir rotatoire. Rytov s'est intéressé à la propagation d'une onde lumineuse polarisée dans un milieu inhomogène, c'est-à-dire un milieu ou la permittivité ε varie en fonction de la position. Il cherche en premier lieu à étudier la rotation des vecteur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ autour de l'axe de propagation. Le calcul fait ici suit exactement celui de Rytov dans le cas où il y a en plus un pouvoir rotatoire.

1 Position du problème

Une onde monochromatique se propageant dans un milieu possède un champ électrique $\mathbf{E}$ et un champ magnétique $\mathbf{H}$ obéissant aux équations de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla \times \mathbf{E} & = & -\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} & = & \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\left(\varepsilon \mathbf{E} + \mathrm{i}f\nabla \times \mathbf{E}\right). \end{array} \right. \tag{1}$$

On écrit $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ et on cherche une solution de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{E} & = & \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon'}}\mathbf{A}(x, y, z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k\psi(x,y,z))} \\ \mathbf{H} & = & \mathbf{B}(x, y, z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k\psi(x,y,z))} \end{array} \right.$$

où ε' reste à déterminer. Ce qui donne, en reportant dans (1) :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \nabla\psi \times \mathbf{A} & - & \sqrt{\varepsilon'}\,\mathbf{B} & = & -\dfrac{\mathrm{i}}{k}\left(\nabla \times \mathbf{A} - \dfrac{1}{2\varepsilon'}\nabla\varepsilon' \times \mathbf{A}\right) \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'}}\mathbf{A} & + & \nabla\psi \times \mathbf{B} + \mathrm{i}f\mathbf{B} & = & -\dfrac{\mathrm{i}}{k}\nabla \times \mathbf{B}. \end{array} \right. \tag{2}$$

2 Développement en série

On décide alors de développer les vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ en série de puissances de i/k en supposant que les hypothèses de convergence de la série sont vérifiées : $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \frac{\mathrm{i}}{k}\mathbf{A}_1 + \cdots$ et $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{\mathrm{i}}{k}\mathbf{B}_1 + \cdots$. On obtient ainsi en comparant terme à terme les membres des équations (2) les relations de l'ordre zéro,

$$\left\{\begin{array}{lcrcl} \nabla\psi \times \mathbf{A}_0 & - & \sqrt{\varepsilon'}\,\mathbf{B}_0 & = & \mathbf{0} \\ \varepsilon\mathbf{A}_0 & + & \sqrt{\varepsilon'}\nabla\psi \times \mathbf{B}_0 + \mathrm{i}f\sqrt{\varepsilon'}\mathbf{B}_0 & = & \mathbf{0}, \end{array}\right. \tag{3}$$

et du premier ordre

$$\left\{\begin{array}{lcrcl} \nabla\psi \times \mathbf{A}_1 & - & \sqrt{\varepsilon'}\,\mathbf{B}_1 & = & -\left(\nabla \times \mathbf{A}_0 - \dfrac{1}{2\varepsilon'}\nabla\varepsilon' \times \mathbf{A}_0\right) \\ \varepsilon\,\mathbf{A}_1 & + & \sqrt{\varepsilon'}\nabla\psi \times \mathbf{B}_1 + \mathrm{i}f\sqrt{\varepsilon'}\mathbf{B}_1 & = & -\sqrt{\varepsilon'}\nabla \times \mathbf{B}_0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Le système (3) a des solution non triviales si et seulement si son déterminant est nul, ce qui conduit à l'équation

$$\left((\nabla\psi)^2 - \varepsilon\right)^2 - f^2(\nabla\psi)^2 = 0 \tag{5}$$

dont les solutions sont du type

$$(\nabla\psi)^2 = \varepsilon \pm f\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2}f^2 = \varepsilon' \tag{6}$$

et l'on définit alors ε' en conséquence.

On pose alors $\nabla\psi = \sqrt{\varepsilon'}\,\hat{\boldsymbol{t}}$ où $\hat{\boldsymbol{t}}$ est un vecteur unitaire orienté dans la direction de propagation du vecteur d'onde ($\hat{\boldsymbol{t}} = \hat{\boldsymbol{k}}$). Les équations (3) et (4) deviennent alors

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \hat{\boldsymbol{t}} \times \mathbf{A}_0 & - & \mathbf{B}_0 & = & \mathbf{0} \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\mathbf{A}_0 & + & \hat{\boldsymbol{t}} \times \mathbf{B}_0 + \mathrm{i}\frac{f}{\sqrt{\varepsilon'}}\mathbf{B}_0 & = & \mathbf{0} \end{array}\right. \tag{7}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrclcl} \hat{\boldsymbol{t}} \times \mathbf{A}_1 & - & \mathbf{B}_1 & = & -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon'}}\left(\nabla \times \mathbf{A}_0 - \dfrac{1}{2\varepsilon'}\nabla\varepsilon' \times \mathbf{A}_0\right) & = & \mathbf{X} \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\mathbf{A}_1 & + & \hat{\boldsymbol{t}} \times \mathbf{B}_1 + \mathrm{i}\frac{f}{\sqrt{\varepsilon'}}\mathbf{B}_1 & = & -\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon'}}\nabla \times \mathbf{B}_0 & = & \mathbf{Y}. \end{array}\right. \tag{8}$$

Le système (7) admet deux familles de solutions linéairement indépendantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{A}_0 & = & \hat{\boldsymbol{n}} \\ \mathbf{B}_0 & = & \hat{\boldsymbol{b}} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{A}_0 & = & \hat{\boldsymbol{b}} \\ \mathbf{B}_0 & = & -\hat{\boldsymbol{n}} \end{array} \right. \tag{9}$$

les vecteurs $\hat{\boldsymbol{n}}$ et $\hat{\boldsymbol{b}}$ étant les deux vecteurs unitaires orthogonaux à $\hat{\boldsymbol{t}}$ formant un trièdre direct. On décide généralement de prendre pour $\hat{\boldsymbol{n}}$ la normale principale au rayon lumineux, $\hat{\boldsymbol{b}}$ est alors la binormale à ce rayon. On écrit alors la solution générale de (7) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{A}_0 & = & \Phi\hat{\boldsymbol{n}} + \Psi\hat{\boldsymbol{b}} \\ \mathbf{B}_0 & = & \Phi\hat{\boldsymbol{b}} - \Psi\hat{\boldsymbol{n}} \end{array} \right. \tag{10}$$

où Φ et Ψ sont des fonctions quelconques.

3 Rotation de la polarisation

Dans l'approximation d'ordre zéro, on a défini en chaque point un trièdre orthogonal $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \hat{\boldsymbol{t}})$, mais comme les fonctions Φ et Ψ sont inconnues, le problème reste entier ! En effet on ne connait pas encore la loi de variation de l'intensité du rayon lumineux, pas plus que la rotation subie par le trièdre.

Le système (8) est de déterminant nul ce qui implique que le membre de droite de ce système formé par les vecteurs $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ doit être orthogonal aux solutions du systèmes homogène, c'est-à-dire de (7) qui sont données par (10). Ainsi on a donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{X} \cdot \hat{\boldsymbol{b}} + \mathbf{Y} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} & = & 0 \\ -\mathbf{X} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} + \mathbf{Y} \cdot \hat{\boldsymbol{b}} & = & 0. \end{array} \right.$$

On obtient alors les équations suivantes après substitution :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla \times \hat{\boldsymbol{n}} + \hat{\boldsymbol{b}} \cdot \nabla \times \hat{\boldsymbol{b}}) - \Phi\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{t}} - 2\hat{\boldsymbol{t}} \cdot \nabla\Psi + \dfrac{1}{2\varepsilon'}\Psi\,\hat{\boldsymbol{t}} \cdot \nabla\varepsilon' & = & 0 \\ \Psi(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla \times \hat{\boldsymbol{n}} + \hat{\boldsymbol{b}} \cdot \nabla \times \hat{\boldsymbol{b}}) + \Psi\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{t}} + 2\hat{\boldsymbol{t}} \cdot \nabla\Phi - \dfrac{1}{2\varepsilon'}\Phi\,\hat{\boldsymbol{t}} \cdot \nabla\varepsilon' & = & 0. \end{array} \right. \tag{11}$$

Dont on déduit par combinaison linéaire la loi de changement d'intensité

$$\nabla \cdot \left(\frac{\Phi^2 + \Psi^2}{\sqrt{\varepsilon'}} \hat{\boldsymbol{t}} \right) = 0$$

et l'équation

$$\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla\times\hat{\boldsymbol{n}}+\hat{\boldsymbol{b}}\cdot\nabla\times\hat{\boldsymbol{b}}) = \frac{\hat{\boldsymbol{t}}\cdot(\Phi\nabla\Psi-\Psi\nabla\Phi)}{\Phi^2+\Psi^2} = \hat{\boldsymbol{t}}\cdot\nabla\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right) = (\hat{\boldsymbol{t}}\cdot\nabla)\,\varphi \tag{12}$$

avec $\varphi = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)$ l'angle entre $\mathbf{A}_0$ et la normale.

4 Loi de Rytov

Utilisons maintenant la relation

$$-\hat{\boldsymbol{t}}\cdot\nabla\times\hat{\boldsymbol{t}}+\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla\times\hat{\boldsymbol{n}}+\hat{\boldsymbol{b}}\cdot\nabla\times\hat{\boldsymbol{b}} = \frac{2}{\tau}$$

où on a noté τ le rayon de torsion. Dans notre cas $\hat{\boldsymbol{t}}$ définit la direction du potentiel vecteur, car $\hat{\boldsymbol{t}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}}\nabla\psi$ donc $\hat{\boldsymbol{t}}\cdot\nabla\times\hat{\boldsymbol{t}} = \mathbf{0}$. La relation précédente se simplifie donc dans ce cas en

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla\times\hat{\boldsymbol{n}}+\hat{\boldsymbol{b}}\cdot\nabla\times\hat{\boldsymbol{b}} = \frac{2}{\tau}. \tag{13}$$

Combinée avec l'expression (12) et en utilisant le fait que $\hat{\boldsymbol{t}}\cdot\nabla = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ on obtient la *loi de Rytov*

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\tau}}. \tag{14}$$

5 Application

Écrivons

$$\left\{\begin{array}{lcl} \hat{\boldsymbol{e}} & = & \hat{\boldsymbol{n}}\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{b}}\sin\varphi \\ \hat{\boldsymbol{h}} & = & \hat{\boldsymbol{b}}\cos\varphi-\hat{\boldsymbol{n}}\sin\varphi. \end{array}\right. \tag{15}$$

où $\hat{\boldsymbol{e}}$ et $\hat{\boldsymbol{h}}$ sont les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ normés. Les équations du trièdre de Frenet sont

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{R}}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{R}}-\frac{\hat{\boldsymbol{b}}}{\tau}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\hat{\boldsymbol{n}}}{\tau}$$

où R est le rayon de courbure. On obtient alors, grâce à la loi de Rytov,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{R}}\cos\varphi, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}s} = \frac{\hat{\boldsymbol{t}}}{\mathrm{R}}\sin\varphi.$$

On voit que la rotation des vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ est ralentie lorsque l'un d'eux est presque parallèle à la binormale $\hat{\boldsymbol{b}}$.

Des équations (13), (14) et (15) on déduit que

$$\hat{\boldsymbol{e}} \cdot \nabla \times \hat{\boldsymbol{e}} + \hat{\boldsymbol{h}} \cdot \nabla \times \hat{\boldsymbol{h}} = 0 \tag{16}$$

quelles que soient la torsion et la courbure. Cependant $\hat{\boldsymbol{e}} \cdot \nabla \times \hat{\boldsymbol{e}}$ et $\hat{\boldsymbol{h}} \cdot \nabla \times \hat{\boldsymbol{h}}$ peuvent être différents de zéro. On appelle alors ce réel la *torsion géodésique* des lignes de $\hat{\boldsymbol{e}}$ dans un plan $\psi = \text{const}$. En général il n'existe pas de systèmes de coordonnées orthogonales (x_1, x_2, x_3) tel que $\hat{\boldsymbol{t}}$, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ soit orthogonaux à une surface $\{x_i = \text{cte}\}$ en tout point. Il faut pour cela que la torsion géodésique soit partout nulle.

On peut également considérer la rotation du plan de polarisation comme une conséquence d'une différence de vitesse de propagation des ondes polarisées circulairement droite et gauche. Les vitesses de propagation sont alors données par

$$v_\pm = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon' \pm \frac{\lambda}{2\pi\tau}}}.$$

References

[1] S. M. Rytov, *Dokl. Akad. Nauk.* **XVIII**, 263 (1938)

[2] Markovski, Vinitski, *Topological phases in quantum physics* World Scientific (1989)